

## Relationer (afsnit 9.1)

Beskriver en sammenhæng mellem elementer i en eller flere mængder.

Eks:

$<, =, |$ , „er barn af“ (binære relationer)  
(CPR-nr, navn, adresse, studium)

Def. 9.1.1: Lad  $A$  og  $B$  være mængder.

En binær relation fra  $A$  til  $B$  er en delmængde af  $A \times B$

Eks:

$$\begin{aligned} R &= \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} : b = \log_2 a \} \\ &= \{ (1, 0), (2, 1), (3, \approx 1,58), (4, 2), \dots \} \end{aligned}$$

NB:

$$\begin{aligned} (8, 3) &\in R, \text{ men} \\ (3, 8) &\notin R \end{aligned}$$

Def. 9.1.2: Lad  $A$  være en mængde

En relation på  $A$  er en relation fra  $A$  til  $A$ , d.v.s. en delmængde af  $A \times A$ .

(Fra nu af kun denne slags relationer)

Eks:  $<$  på  $\mathbb{N}$

$$\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 2), (0, 3), \dots\}$$

$$(1, 0) \notin <$$

Man skriver normalt ikke  $(0, 1) \in <$

Derimod  $0 < 1$ .

$$(a, b) \in R$$

$$a R b$$

„a er relateret til b gennem R”.

Eks:

Først lidt notation:

$$5 \bmod 3 = 2 = 8 \bmod 3 \Leftrightarrow 5 \equiv 8 \pmod{3}$$

$$7 \bmod 2 = 1 = 15 \bmod 2 \Leftrightarrow 7 \equiv 15 \pmod{2}$$

$$8 \bmod 4 = 0 = 20 \bmod 4 \Leftrightarrow 8 \equiv 20 \pmod{4}$$

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{5}\}$$

$$(4, 9) \in R$$

$$(7, 17) \in R$$

$$(5, 0) \in R$$

$$(2, 4) \notin R$$

## Egenskaber

Def. 9.1.3:  $R$ : relation på  $A$

Hvis  $(a,a) \in R$  for alle  $a \in A$ ,  
da er  $R$  refleksiv.

Eks:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(1,2), (2,1), (3,3)\} \quad \text{?}$$

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,2)\} \quad \text{?}$$

$$T = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\} \quad \checkmark$$

Andre eksempler:

$$\text{?} : <, \neq$$

$$\checkmark : \leq, =, |, \equiv$$

Refleksiv lukning af  $R$ :

(afsnit 9.4)

$$R \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$$

Eks:

$T$  er den refleksive lukning af  $S$  ovenfor.

$$\begin{array}{cc} \text{Refleksiv lukning af } < : & \leq \\ & = \\ & \neq \\ & | \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ A \times A \\ | \end{array}$$

Def. 9.1.4:  $R$ : relation på  $A$ .

Hvis  $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$  for alle  $(a,b) \in R$

Da er  $R$  symmetrisk

Eksempler?

$\forall$ :  $R, <, |$

$\forall$ :  $S, T, =, \equiv, \neq$

Symmetriske lukning af  $R$ :

$$R \cup \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

Symm. lukning af  $R$ :  $R$

$$S: S \cup \{(2,1)\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$

$$T: T \cup \{(2,1)\}$$

$$<: \neq$$

$$=: =$$

$$\leq: A \times A$$

$$\equiv: \equiv$$

Def. 9.1.4:  $R$ : relation på  $A$

Hvis  $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$ , for alle  $a,b \in A$ ,  
da kaldes  $R$  antisymmetrisk

Eller:

Hvis  $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \vee a=b$ , for alle  $a,b \in A$ ,  
da kaldes  $R$  antisymmetrisk

Eks:

$\checkmark$ :  $\{(1,1), (1,2), (3,2)\}$ ,  $=, \leq, <, |$

$\times$ :  $\{(1,1), (1,2), (2,1)\}$ ,  $\equiv, \neq$

Antisymmetrisk lukning findes ikke.

For at gøre en ikke-antisymmetrisk relation antisymmetrisk  
skal man fjerne elementer.

Def. 9.1.5:  $R$  relation på  $A$

Hvis  $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$  for alle  $a,b,c \in R$ ,  
da kaldes  $R$  transitiv.

Eks:  $\{(1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$(1,2), (2,3) \rightarrow (1,3) \checkmark$

$(1,3), (3,2) \rightarrow (1,2) \checkmark$

$((1,3), (3,3) \rightarrow (1,3) \checkmark)$

$(2,3), (3,2) \rightarrow (2,2) \times \Rightarrow$  ikke transitiv

$\checkmark$ :  $=, <, |, \equiv$

$\times$ :  $\neq$

Relationer kan sættes sammen (præcis som funktioner) :

$$S \circ R = \{ (a,c) \mid \exists b : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S \}$$

Eks :

$$R = \{ (1, \underline{2}), (3, \underline{1}) \}$$

$$S = \{ (\underline{1}, 3), (\underline{2}, 2), (\underline{2}, 3) \}$$

$$S \circ R = \{ (1,2), (1,3), (3,3) \}$$

$$T = \{ (1, \underline{2}), (3, \underline{2}) \}$$

$$U = \{ (\underline{2}, 1), (\underline{2}, 2), (\underline{2}, 3) \}$$

$$U \circ T = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$$

Eks :

$$R = \{ (1, \underline{3}), (2, \underline{4}), (3, \underline{5}), (4, \underline{6}), (5, \underline{7}) \}$$

$$R^2 = R \circ R = \{ (\underline{1}, 5), (\underline{2}, 6), (\underline{3}, 7) \}$$

$$<^2 = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b-2 \}, \text{ hvis } A = \mathbb{N}$$

$$<^2 = <, \text{ hvis } A = \mathbb{R}$$

$$=^2 = =$$

$$\neq^2 = A \times A$$

$$S = \{ (a,b) \mid b = a^2 \}$$

$$S^2 = \{ (a,b) \mid b = a^4 \}$$

Transitive lukning af R

$$\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$$

Verder tilbage til, hvorfor det er den "rigtige" def....

$$R = \{(1, \underline{3}), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)\} \quad (\text{fra før})$$

$$R^2 = \{(1, 5), (2, 6), (\underline{3}, 7)\}$$

$$R^3 = R^2 \circ R = \{(1, 7)\} = R \circ R^2$$

$$R^4 = R^3 \circ R = \{\}$$

$$R^5 = R^4 \circ R = \{\}$$

⋮



$R_t$ : transitive lukning af  $R$

$$R_t = R \cup R^2 \cup R^3$$

$$= \{(\underline{1}, \underline{3}), (\underline{2}, \underline{4}), (\underline{3}, \underline{5}), (\underline{4}, \underline{6}), (5, 7), (\underline{1}, \underline{5}), (\underline{2}, \underline{6}), (\underline{3}, \underline{7}), (\underline{1}, \underline{7})\}$$

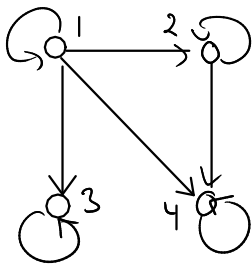
## Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

Man kan repr. rel. u.h.a.

- Opremsning
  - Mængde-byggeset notation
  - Matricer (Hvis  $A, B$  endelige)
  - Orienterede grafer (Hvis  $A=B$  og  $A$  endelig)  
(digraphs)
- } har vi allerede set

### Orienterede grafer

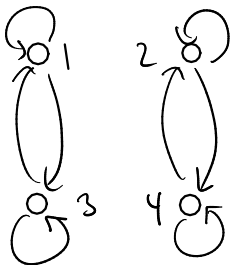
Eks: | på  $\{1, 2, 3, 4\}$



Fire knuder og otte kanter, hvoraf fire er loops.

Refleksiv p.g.a. loops  
Transitiv på  $\searrow$

Eks:  $\equiv \pmod{2}$  på  $\{1, 2, 3, 4\}$



refleksiv, symmetrisk, transitiv  
(dvs. ækv.rel...)