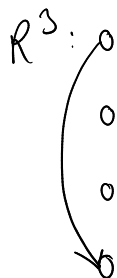
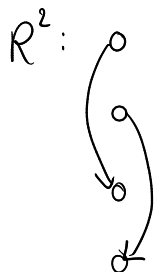
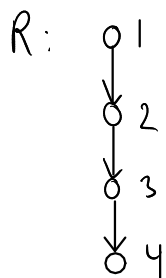
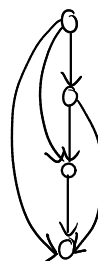


Eks: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{ (a, b) \in A \times A \mid b = a + 1 \}$$



$$R_t = R \cup R^2 \cup R^3:$$



Transitiv relation:

Hvis der er en vej fra a til b ,
er der også en kant fra a til b .

$\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$ er præcis den transitive lukning af R :

- $\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$ er transitiv:
Hvis der findes en vej fra a til b ,
findes der en vej fra a til b af længde højst $|A|$.
- $\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$ indeholder ikke noget "overflødig".
D.v.s. hvis vi ikke tilføjer hele $\bigcup_{i=2}^{|A|} R^i$ til R ,
er resultatet ikke en transitiv relation.

Matricer

Eks: $R = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

"fra 1" "til 2"

$\odot$: Som gange med

• $\rightarrow \wedge$

+ $\rightarrow \vee$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \odot M_R$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M_{R^2}$$

D.v.s.

$$R_t = R \cup R^2$$

D.v.s.

$$M_{R_t} = M_R \vee M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_r} = \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix}$$

R_r : refl. looking of R

$$M_{R_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \color{red}{1} & 0 \end{bmatrix}$$

R_s : symm. looking of R

Ækvivalensrelationer

Def. 9.5.1:

En relation, som er

- refleksiv
- symmetrisk
- transitiv

kaldes en ækvivalensrelation.

Eks:

$$\sqrt{}: =, \equiv$$

$$\forall: \leq, |, \neq$$

Def. 8.5.2:

Hvis R er en ækv. rel., og $(a, b) \in R$,
da er a og b ækvivalente.

D.v.s. hvis R er en ækv. rel., og $(b, a) \in R$,
da er a og b ækvivalente (R er symmetrisk).

Def. 9.5.3:

Lad R være en ækv. rel. på A og $a \in A$

$$[a]_R = \{ b \mid (a, b) \in R \} = \{ b \mid (b, a) \in R \}$$

kaldes a 's ækvivalensklasse.

Eks: $\equiv \pmod{3}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1] = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$[3] = \{0, 3, 6, 9, \dots\} = [0]$$

O.S.V.

Bemærk: $[0] \cup [1] \cup [2] = \mathbb{N}$

Eks: $=$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

Sætning 9.5.1:

Lad R være en ækv.rel. på A .

Da gælder

$$\begin{array}{ll} aRb & (i) \\ \Updownarrow & \\ [a] = [b] & (ii) \\ \Updownarrow & \\ [a] \cap [b] \neq \emptyset & (iii) \end{array}$$

Bevis:

Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b] : (i) \Rightarrow (ii)}$$

Antag, aRb

Da er bRa , da R er symmetrisk

$$\underline{[a] \subseteq [b] :}$$

$$\Updownarrow c \in [a]$$

$$\Updownarrow cRa$$

$$\Updownarrow cRa \wedge aRb \quad (\text{vores antagelse})$$

$$\Downarrow cRb, \text{ da } R \text{ transitiv}$$

$$\Updownarrow c \in [b]$$

D.v.s. alt, hvad der er i $[a]$, er også i $[b]$.

$$\underline{[b] \subseteq [a] :}$$

$$\Updownarrow c \in [b]$$

$$\Updownarrow cRb$$

$$\Downarrow cRb \wedge bRa \quad (\text{vores antagelse})$$

$$\Downarrow cRa, \text{ da } R \text{ er transitiv}$$

$$\Updownarrow c \in [a]$$

D.v.s. alt, hvad der er i $[b]$, er også i $[a]$.

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset : (ii) \Rightarrow (iii)}$$

Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er refleksiv

$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb : ((ii) \Rightarrow (i))}$$

$$\Uparrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Uparrow \exists c : aRc \wedge cRb$$

$$\Uparrow aRb, \text{ da } R \text{ er transitiv}$$

Sætning 9.5.1 kan bruges til at vise:

Sætning 9.5.2:

Lad A være en mængde. Da gælder

(1) R er en ækv.rel på $A \Rightarrow$

R 's ækv.klasser udgør en partitionering (disjunkt opdeling) af A .

Det omvendte gælder også:

(2) For enhver partitionering af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i partitioneringen.

Beris:

(1): Ækv.rel. $\Rightarrow$ partitionering:

Ækv.klasserne dækker hele A , dvs $\bigcup_{a \in A} [a] = A$:

$\Downarrow$ $a \in [a]$ for alle $a \in A$, da R er refleksiv

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} = \bigcup_{a \in A} [a]$$

Ækv.klasserne er disjunkte, dvs. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Kontraposition:

$$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$$

Gælder iflg. Sætning 9.5.1.

(2): Partitionering $\Rightarrow$ ækv.rel.:

Lad R være relationen defineret ved, at aRb , hvis og kun hvis a og b tilhører samme mængde i partitioneringen.

Vi skal vise, at R er en ækv.rel.

Refleksiv: for alle $a \in A$ gælder:

a tilhører samme mængde som a .

Symmetrisk: for alle $a, b \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,
så tilhører b samme mængde som a .

Transitiv: for alle $a, b, c \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,
og b tilhører samme mængde som c ,
så tilhører a samme mængde som c .

Partielle ordninger (afsnit 9.6)

Def. 9.6.1:

En relation R på en mængde A , som er

- refleksiv,
- antisymmetrisk og
- transitiv

kaldes en partiel ordning.

(A, R) kaldes en partielt ordnet mængde.

Eks:

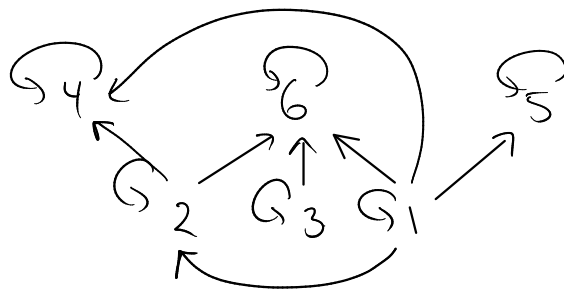
$\vee : \leq, =, |, \subseteq$

$\wedge : <, \neq, \equiv, \subset$

Eks:

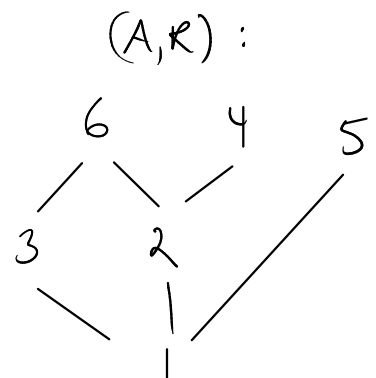
$A = \{1, 2, \dots, 6\}$, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a|b\}$

(A, R) :



Hasse-diagram:

- Udelad alle kanter, som kan udledes af egenskaberne refleksiv og transitiv.
- Tegn a under b , hvis aRb .



Def. 9.6.2 :

Lad $\leq$ være en partiel ordning

Hvis $a \leq b$ eller $b \leq a$, kaldes a og b sammenlignelige.

Def. 9.6.3 :

Lad $(A, \leq)$ være en partielt ordnet mængde.

Hvis alle $a, b \in A$ er sammenlignelige,

kaldes $\leq$ en total ordning

Ex:

$\sqrt{} : \leq$

$\% : =, |, \subseteq$

6
|
5
|
4
|
3
|
2
|
1

Leksikografisk ordning $\leq$

$\leq_1, \leq_2$: partielle ordninger

$a <_1 b$ betyder $a \leq_1 b \wedge a \neq b$

Tilsvarende for $\leq_2$.

$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, hvis

$a_1 <_1 a_2$

eller

$a_1 = a_2$ og $a_2 \leq_2 b_2$

Eks: Ordbog

Her er $\leq_1, \leq_2, \leq_3, \dots$ alfabetrækkefølge