

Funktioner (afsnit 2.3)

$$f: A \rightarrow B$$

f tildeler præcis ét element fra B til hvert element i A .

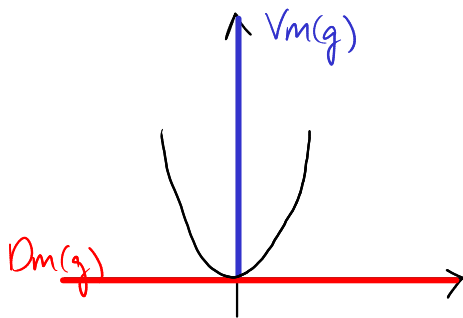
A : definitionsområde ($D_m(f)$) (domain)

B : sekundærområde (codomain)

Værdiområde / billedområde: (range)

$$\begin{aligned} V_m(f) &= \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \\ &= \underline{f(A)} \end{aligned}$$

Eks: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2$



$$D_m(g) = \mathbb{R}$$

Sekundærområde: $\mathbb{R}$

$$(g(\mathbb{R}) =) V_m(g) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R} \Rightarrow$$

g er ikke surjektiv

($V_m(g)$ "dækker" ikke hele $\mathbb{R}$)

- $f: A \rightarrow B$ er surjektiv / på, hvis $V_m(f) = B$

$V_m(f) = B$ er ækvivalent med

$$\forall y \in B : \exists x \in A : y = f(x)$$

D.v.s. for hvert y i sekundærområde

findes der et x i def.månde, som mappes til y .

- f er injektiv / en-til-en, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f): f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

V.h.a. kontraposition kan denne def. omskrives til det ækvivalente udsagn:

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dm}(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

D.v.s. der er ikke to forskellige x -værdier med samme funktionsværdi.

D.v.s. g er heller ikke injektiv

eks: $g(-1) = g(1)$

Eks: $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \frac{1}{x}$



- h er injektiv:

for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

- h er surjektiv:

for alle $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

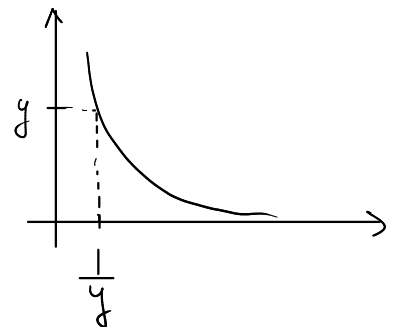
$$y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} \quad \text{og} \quad \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+$$

D.v.s.

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow x \in \text{Dm}(h) \wedge y = h(x)$$

D.v.s.

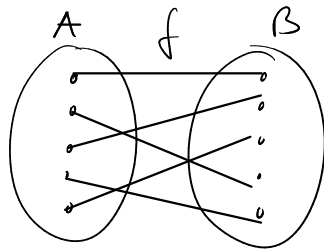
$$\exists x \in \text{Dm}(h): y = h(x)$$



Domed er h bijektiv

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv

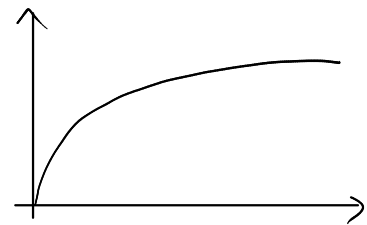


Eks: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{x}$

- f er injektiv:

For alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ gælder

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$



- f er surjektiv:

For alle $y \in \mathbb{R}^+$ gælder:

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \quad \text{og}$$

$$y^2 \in \mathbb{R}^+ = D_m(f)$$

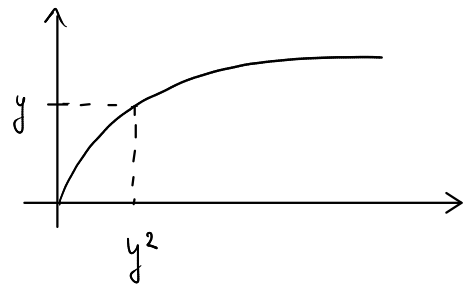
D.v.s.

$$x = y^2$$

$$\Downarrow x \in D_m(f) \wedge y = f(x)$$

D.v.s.

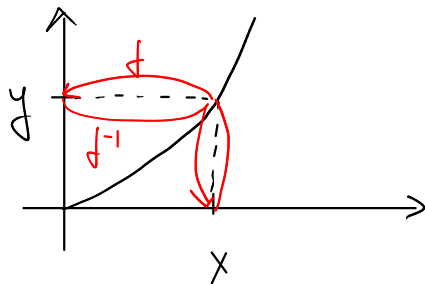
$$\exists x \in D_m(f) : y = f(x)$$



Hvis $f: A \rightarrow B$ er bijektiv, har den en
invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ (f er invertibel).

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$

D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$



• g er ikke invertibel

• h er invertibel

$h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$, da

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

• f er invertibel

$f^{-1}(x) = x^2$, da

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Man kan kombinere funktioner til nye funktioner:

Lad $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ og $g: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Da er $f+g$, $f \cdot g$ og $f \circ g$ funktioner fra A til $\mathbb{R}$ defineret ved

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Eks: $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 1$

$$(f+g)(x) = x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1$$

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Eks: $(f \cdot g)(x) = x^2(x^2 + 1) = x^4 + x^2$

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Sammensat funktion

Eks: $(f \circ g)(x) = f(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2) = (x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(x^2) = x^4$$

$$f^3(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f(x^4) = x^6$$

$$g^2(x) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

Lidt mere terminologi:

f er voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f er strengt voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Tilsvarende for (strengt) aftagende

Eks:

Voksende:

$$\begin{array}{l} f(x) = x \\ f(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = 5 \\ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, f(x) = x^2 \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} \text{strengt voksende} \end{array}$$

Aftagende:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x \\ f(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = 5 \end{array} \right\} \text{strengt aftagende}$$

Hvis f er aftagende eller voksende, kaldes den monoton

Følger & rækker (afsnit 2.4)

(Sequences & summations / progressions & series)

Følge: Ordnet mængde /
Funktion fra (delmængde af) $\mathbb{N}$

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

$$f(n): \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+, \quad f(n) = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

$$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

↑ konflikt med mængdenotation

Række: Sum af et endeligt eller uendeligt # led.

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \approx \ln n$$

(n'te harmoniske tal)

Eks: Coupon Collector's Problem

Corn Flakes - pakker med 1 klistmærke hver
n forskellige klistmærker

For at få et af hver slags skal man i gennemsnit
købe nH_n pakker:

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + 1$$

Geometrisk følge: $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$

$$a_n = ar^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled $\nearrow$
fælles faktor $\nwarrow$

Geometrisk række: $\sum_{i=0}^n ar^i = a \sum_{i=0}^n r^i$

Eks: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1 \quad (a=1, r=2)$

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Generelt:

$$\sum_{i=0}^n ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, \quad \text{for } r \neq 1$$

Aritmetisk følge: $a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$

begyndelsesled $\nearrow$
fælles forskel $\nwarrow$

$$a_n = a + nd, \quad n \in \mathbb{N}$$

Aritmetrisk række:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a + id &= \sum_{i=0}^n a + d \sum_{i=0}^n i = a(n+1) + d \frac{(n+1)n}{2} \\ &= (n+1) \left(a + \frac{dn}{2} \right) \end{aligned}$$

for $i:=1$ to 10

for $j:=1$ to 20

...

$$\# \text{ gennemløb} = 10 \cdot 20 = \sum_{i=1}^{10} 20 = 200$$

for $i:=1$ to 10

for $j:=1$ to i

...

$$\# \text{ gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

for $i:=5$ to 10

for $j:=1$ to i

...

$$\# \text{ gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^4 i = 55 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 45$$

for $i:=1$ to 3

for $j:=1$ to i

for $k:=1$ to j

...

$$\begin{aligned} \# \text{ gennemløb} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^3 \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{i^2 + i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \right) + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{2}, \quad \text{iflg. Tabel 2.4.2} \\ &= 7 + 3 = 10 \end{aligned}$$

s. 166

Notation: $\sum_{i=1}^5 i = \sum_{1 \leq i \leq 5} i = \sum_{i \in A} i$, hvor $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Kardinalitet af mængder (afsnit 2.5)

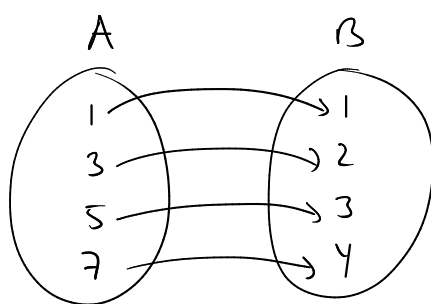
$|A|$: kardinaliteten af A .

Hvis A er endelig, er $|A| = \# \text{ elementer i } A$.

Def. 2.5.2:

A og B har samme kardinalitet
 $\Leftrightarrow \exists$ bijektion $f: A \rightarrow B$

Eks:



$$|A| = |B| = 4$$

Eks:

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{L}^+ = \{2n \mid n \in \mathbb{N}^+\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^+ \quad \mathbb{L}^+$$

$$1 \longrightarrow 2$$

$$2 \longrightarrow 4$$

$$3 \longrightarrow 6$$

$$4 \longrightarrow 8$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{L}^+, \quad f(n) = 2n$$

er en bijektion

Eller

Elementene i A kan stilles op i en uendelig række, som indeholder dem alle.

D.v.s.

$\mathbb{L}^+$ og $\mathbb{N}^+$ har samme kardinalitet.

Def. 2.5.4:

Kardinaliteten af $\mathbb{N}^+$ kaldes $\aleph_0$ (alef 0)

En mængde, som er endelig eller har kardinalitet $\aleph_0$, kaldes tællelig.

En mængde, som ikke er tællelig, kaldes overtællelig.

En mængde med kardinalitet $\aleph_0$ kaldes tælleligt uendelig.

Eks 3: $\mathbb{Z}$ er tællelig

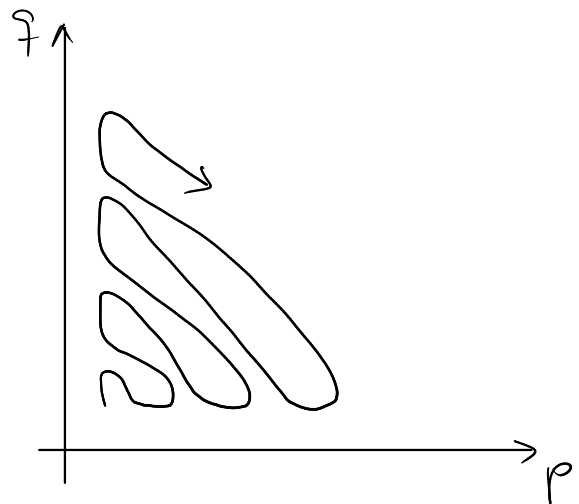
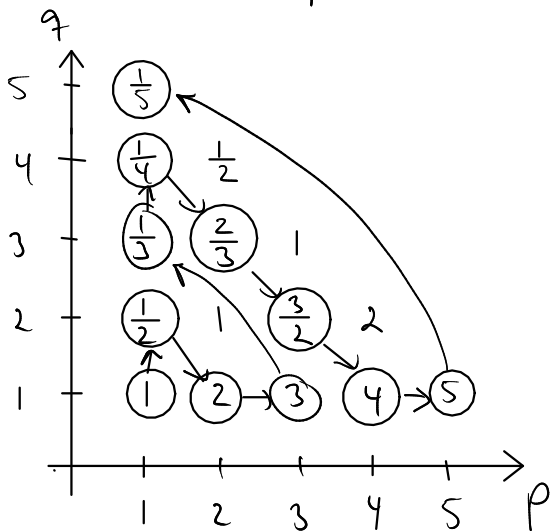
$0, -1, 1, -2, 2, \dots$

Eller

$$f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = (-1)^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Eks 4: $\mathbb{Q}^+$ er tællelig

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$



$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

$\mathbb{Q}$ er også tællelig:

Gør det samme med $\mathbb{Q}^-$

Start med 0, og find så $\mathbb{Q}^-$ og $\mathbb{Q}^+$, som vi gjorde
det med $\mathbb{Z}^-$ og $\mathbb{Z}^+$.

Eks 5: $\mathbb{R}$ er uædtællelig (ikke gennemgængt)

Diagonalisering:

Antag til modstrid, at $\mathbb{R}$ er tællelig.

Da er $R = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$ tællelig.

D.v.s. elementerne i R kan opremses:

$$r_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}\dots$$

$$r_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}\dots$$

$$r_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}\dots$$

$\vdots$

Hvis vi ikke tillader en uendelig følge af 9-taller,
kan hvert tal i R skrives på præcis én måde.

Vi kan konstruere et tal i R , som ikke er med i
opremsningen:

$$0, d_1d_2d_3\dots, \text{ hvor}$$

$$d_i = \begin{cases} 4, & \text{hvis } d_{ii} \neq 4 \\ 5, & \text{ellers} \end{cases}$$

