Følger & rækker (afsnit 2.4)

(Sequences & summations / progressions & series)

Følge: (Sequence / progression)
Ordnet mængde /
Funktion fra (delmængde af) $\mathbb{N}$

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ (uendelig følge)

$f(n): \mathbb{N}^+ \to \mathbb{Q}^+$, $f(n) = \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$

$\{a_n\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

konflikt med mængdenotation

Eks: Fibonacci-tallene (uendelig følge)

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

$f_0 = f_1 = 1$

ingen dør

$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, for $n \geq 2$

Hvert par, som var der allerede for to måneder siden, får et par unger.

Modellere # kaniner på en ø:

- Et par sættes på øen ved starten af første måned
- Fra et par er to måneder, får du <u>et par unger hver måned</u>
- Ingen kaniner dør

Eks: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (uendelig følge)

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Eller

$$a_0 = 1$$
$$a_n = \frac{1}{2} \cdot a_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1$$

Eks på:

Geometrisk følge:

$$a, ar, ar^2, \ldots$$

$$a_n = \underbrace{a}_{\text{begyndelsesled}} \underbrace{r}_{\text{fælles faktor}}^{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled

fælles faktor

Eksemplet fra før: $a = 1, \quad r = \frac{1}{2}$

Aritmetrisk følge:

$$a, a+d, a+2d, \ldots$$

$$a_n = \underbrace{a}_{\text{begyndelsesled}} + n\underbrace{d}_{\text{fælles forskel}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

begyndelsesled

fælles forskel

Eks: $1, 3, 5, 7, \ldots$

$a = 1, \quad d = 2$

Eks: Mandelbrot-følge

Defineret for hvert $c \in \mathbb{C}$:

$$x_0 = 0$$

$$x_n = x_{n-1}^2 + c, \qquad n \geq 1$$

c tilhører Mandelbrot-mængden, hvis x_n er begrænset

i tilhører Mandelbrot-mængden:

$$x_1 = 0^2 + i = i$$

$$x_2 = i^2 + i = i - 1$$

$$x_3 = (i-1)^2 + i = -1 + 1 - 2i + i = -i$$

$$x_4 = (-i)^2 + i = i - 1 = \underline{x_2}$$

$$x_5 = x_4^2 + i = x_2^2 + i = x_3$$

$$x_6 = x_4 = x_2$$

$$\vdots$$

D.v.s.

x_n er begrænset

Escape condition: $|x_n| > 2$

Jo hurtigere escape, jo lysere farve.

Man kan selvfølgelig også lave en <u>endelig</u> følge:

$1, 3, 5, 7, 9$ eller

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

Man kan også lægge tallene i en følge sammen ...

Række (summation / series):
Sum af et endeligt eller uendelig # led.

Eks: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Geometrisk række: $\sum_{i=1}^{n} ar^{i}$

$a = 1, \quad r = \frac{1}{2}$

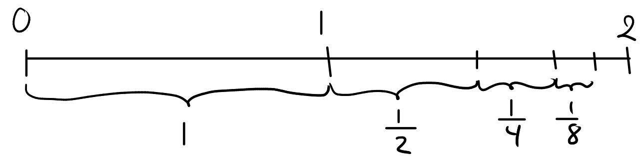
$$\sum_{i=0}^{1} i = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{2} i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{i=0}^{3} i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 2$$



Mere generelt:

Tabel 2, linie 1:

$$\sum_{i=0}^{n} r^{i} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{for } r \neq 1 \qquad (= n+1, \text{ for } r = 1)$$

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{i} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$

Illustration: (binære tal)

$i = 0$ 1
$i = 1$ 10
$i = 2$ 100
$i = 3$ 1000

1111 = 10000 − 1

$r = 3$: Ternære tal:

$2 \cdot 3^0$: 2
$2 \cdot 3^1$: 20
$2 \cdot 3^2$: 200
$2 \cdot 3^4$: 2000

2222 = 10000 − 1

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n+1}-1}{r-1} = \frac{0-1}{r-1}, \quad \text{for } -1<r<1$$

$$= \frac{1}{1-r}$$

(Tabel 2, linie 5)

Differentier på begge sider:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i r^{i-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

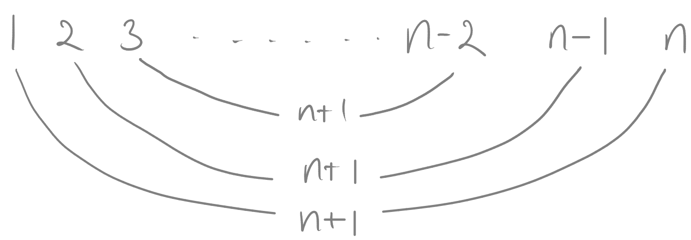
(Tabel 2, linie 6)

Aritmetriske rækker:

$$\sum_{i=0}^{n} (a+id) = (n+1)a + d \sum_{i=0}^{n} i$$

$$= (n+1)a + d\,\frac{n(n+1)}{2}$$

Tabel 2, s. 166
2. linie



n lige:

$\frac{n}{2}$ par med sum $n+1$

n ulige:

$\frac{n-1}{2}$ par med sum $n+1$

Midterste tal: $\frac{n+1}{2}$

I alt: $(n-1)\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Bevises også v.h.a. induktion senere i kurset.

Eks:

$$1+3+5+7+\dots+2n+1 = \sum_{i=0}^{n} (1+2i)$$

$$= (n+1)\cdot 1 + 2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= n+1 + n(n+1)$$

$$= (n+1)(n+1)$$

$$= n^2+2n+1$$

Summer dukker f.eks. op, når vi skal beregne #gennemløb af et loop (for at anslå køretid af en algoritme):

For i:=1 to 10
  For j:=1 to 20
  ...

$$\#\text{gennemløb} = 10 \cdot 20 = \sum_{i=1}^{10} 20 = 200$$

For i:=1 to 10
  For j:=1 to i
  ...

$$\#\text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

For i:=5 to 10
  For j:=1 to i
  ...

$$\#\text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^{4} i = 55 - \frac{4 \cdot 5}{2} = 45$$

For $i := 1$ to 3
    For $j := 1$ to i
        For $k := 1$ to j
            ...

Tabel 2

$$\# \text{gennemløb} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{3} \frac{i(i+1)}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{i^2+i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} i$$

Tabel 2, Linie 2 og 3

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6}\right) + \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 4}{2}, \quad \text{ifølge Tabel 2.4.2 s. 166}$$

$$= 7 + 3 = 10$$

<u>Notation</u>:

$$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{1 \le i \le 5} i = \sum_{i \in A} i, \quad \text{hvor } A = \{1,2,3,4,5\}$$