Notation (summer):

$$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{1\le i\le 5} i = \sum_{i\in A} i, \quad \text{hvor } A=\{1,2,3,4,5\}$$

Adams afsnit 9.1: Følger og konvergens

En følge kan enten konvergere eller divergere.

Definition 2:

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L\in\mathbb{R}$.

Hvis følgende gælder:

$$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{Z} : \forall n\geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

Da konvergerer a_n mod grænseværdien L.

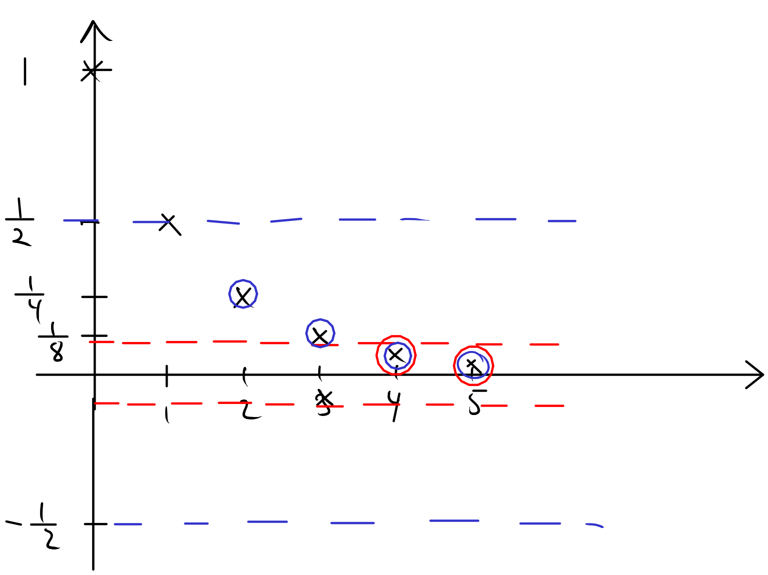
Dette skrives også $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

eller $a_n \to L$ for $n\to\infty$.

„går imod" „gående mod"

Eks: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n\in\mathbb{N}$

$\{a_n\}$ konvergerer mod 0:



For $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kunne man f.eks. vælge $N=2$.

For $\varepsilon=\frac{1}{10}$ kunne man vælge $N=4$.

Generelt:

Vælg $N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

En sekvens, som ikke konvergerer, divergerer.

Eks 5:

$\left\{\frac{n-1}{n}\right\} = \langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \ldots \rangle$ konvergerer mod 1.

$\{n\} = \langle 1, 2, 3, \ldots \rangle$ divergerer mod ∞.

$\{-n\} = \langle -1, -2, -3, \ldots \rangle$ divergerer mod $-\infty$.

$\{(-1)^n\} = \langle -1, 1, -1, \ldots \rangle$ divergerer.

$\{(-1)^n n\} = \langle -1, 2, -3, 4, \ldots \rangle$ divergerer.

Regneregler for grænseværdier (S. 198 ø):

- $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

Eks: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

$= 2 + 1 = 3$

Tilsvarende for $-$ og $\cdot$

og for $/$, hvis $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Eks: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \cdot 1 = 2$

- $$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

Eks: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$

- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n \leq b_n$ („$a_n \leq b_n$ ultimately")

$\Downarrow$

$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$

Eks: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $b_n = \frac{2n}{n+100}$

$$a_n \leq b_n$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\cancel{n}}{n+1} \leq \frac{2\cancel{n}}{n+100}$$
$$\Updownarrow$$
$$n+100 \leq 2n+2$$
$$\Updownarrow$$
$$98 \leq n$$

D.v.s.

$$\forall n \geq 98: \quad a_n \leq b_n$$

D.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Check: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \leq 2 = \lim_{n\to\infty} b_n$ – OK!

Vi brugte nogle af disse regler i sidste uge.

Eks 6a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{2n^2} - \overset{\to\infty}{n} - 1}{5n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{2-0-0}{5+1-3} = \frac{2}{5}$$

Tommelfingerregel: Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.

Sætning 3:

(a) $|x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Dette resultat brugte vi også i sidste uge

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Bevis:

(a): (Beviset er en smule anderledes end i bogen)

Af Def. 2 fås:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall \varepsilon>0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$|x^n| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n \ln|x| < \ln \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|},$$

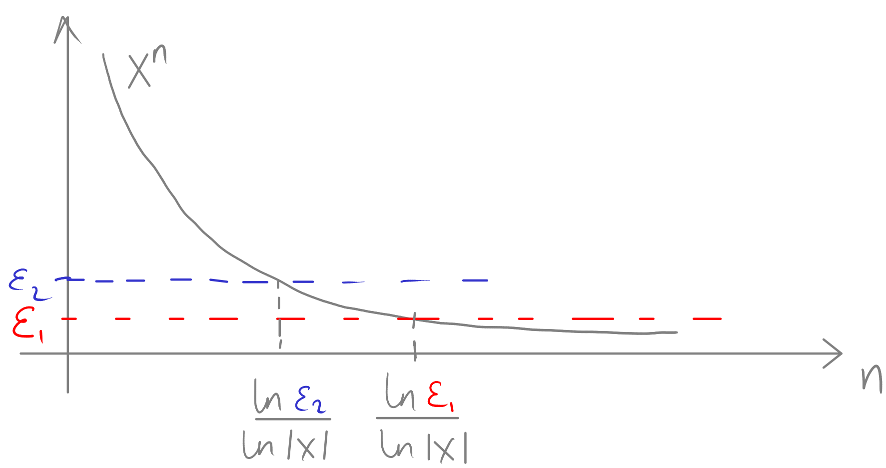
da $|x|<1 \Rightarrow \ln|x| \neq 0$

(vender ulighedstegnet, da jeg dividerer med noget negativt)

D.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln|x|} : |x|^n < \varepsilon$$

Illustration:



(b) $$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{\overbrace{|x|\cdot|x|\cdot\cdots\cdot|x|}^{n}}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}$$

$$= \frac{\overbrace{|x|\cdot|x|\cdots|x|}^{\lceil |x|\rceil}}{1\cdot 2\cdots\lceil |x|\rceil} \quad \frac{\overbrace{|x|\cdot|x|\cdots|x|}^{n-\lceil |x|\rceil}}{(\lceil |x|\rceil+1)\cdots n}$$

$$= \underbrace{\frac{|x|\cdot|x|\cdots|x|}{1\cdot 2\cdots\lceil |x|\rceil}}_{C} \quad \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x|\rceil+1}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x|\rceil+2}}_{<1}\cdot\;\cdots\;\cdot\underbrace{\frac{|x|}{n-1}}_{<1}\cdot\frac{|x|}{n}$$

$$< \frac{C|x|}{n}$$

D.v.s.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{C|x|}{n}, \quad \text{hvor } C = \frac{x^{\lceil x\rceil}}{\lceil x\rceil!}$$

$$= C|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \quad \text{iflg. regnereglerne for grænseværdier}$$

$$= 0$$

Klart, at

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| \geq 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$$

Eks 10:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\tfrac{3}{5}\right)^n + \left(\tfrac{4}{5}\right)^n + 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{3}{5}\right)^n + \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{4}{5}\right)^n + \lim_{n\to\infty} 1,$$

iflg. regnereglerne for grænseværdier

$$= 0 + 0 + 1, \quad \text{iflg. Sætning 3(a).}$$

Afsnit 9.2: Uendelige rækker

Vi så nogle uendelige rækker allerede sidste gang.

F.eks.:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^i = 2$$

Eller mere generelt:

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{r^{n+1}-1}{r-1}, \qquad \text{hvis } r \neq 1$$

(Geometrisk række)

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{0-1}{r-1} = \frac{1}{1-r}, \qquad \text{hvis } |r| < 1$$

regneregler + Sætning 3(a)

Vi så også et eksempel på en aritmetrisk række:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad - \text{ divergerer}$$

Def. 3:

Lad $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Da kaldes s_n den n'te partielle sum af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} s_n = s$,

siges $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at konvergere mod s.

Dette skrives også som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{konvergerer mod } \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \\ \text{divergerer}, & \text{hvis } r \leq -1 \end{cases}$$