Eks 4:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$ Harmonisk række

$$H_n = S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$ n'te harmoniske tal

H_n optræder i mange sammenhænge, f.eks.:

Eks: Coupon Collector's Problem

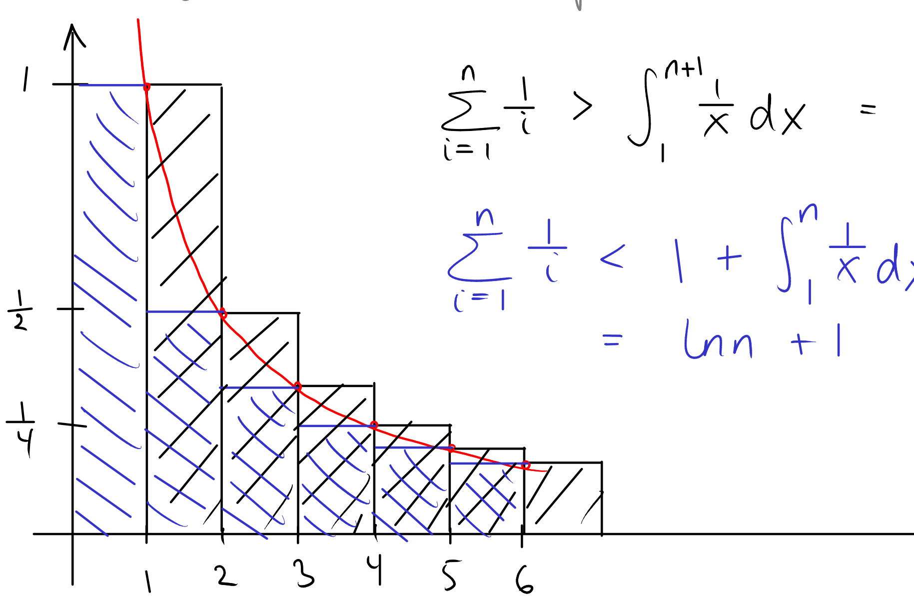
Corn Flakes-pakker med et klistermærke i hver

n forskellige klistermærker

For at få et af hver slags skal man i gennemsnit købe nH_n pakker:

$$\frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{1}\right)$$

Hvor mange Corn Flakes-pakker skal vi så købe?



$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln x\right]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = 1 + \left[\ln x\right]_1^{n}$$
$$= \ln n + 1$$

D.v.s. $\ln n < H_n < \ln n + 1$

$\Rightarrow$ vi skal i gennemsnit købe $\approx n \ln n$ pakker.

D.v.s. H_n divergerer mod ∞.

Sætning 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$\Downarrow \qquad \text{Bemærk: } \underline{\text{ikke}} \Uparrow \text{!}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bevis:

Bemærk, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\, S \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ifølge Def. 3

$$S_n - S_{n-1} = (a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = a_n$$

D.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= S - S$$

$$= 0 \qquad \square$$

<u>Husk</u> at det modsatte <u>ikke</u> gælder:

<u>Eks:</u> $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer mod ∞.

D.v.s. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ er en nødvendig, men ikke tilstrækkelig betingelse for, at $\sum_{i=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

Eks 5(a):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1} \text{ divergerer mod } \infty \text{, da } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} > 0.$$

Sætning 5:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall N \geq 1 : \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

Bevis: opgave 23

D.v.s. konvergensen afhænger kun af rækkens „hale" (tail).

Husk fra sidste gang (Def. 3), at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n, \quad \text{hvor} \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

D.v.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er grænseværdien for afsnitsfølgen $\{s_n\}$.

Dermed gælder de samme regneregler for uendelige rækker som for grænseværdien af en følge.
Dette er udtrykt i Sætning 7.

Eks 6:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \underline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)} \underline{- \left(\frac{1}{3}\right)^0} + 2 \left(\underline{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)} \underline{- \left(\frac{2}{3}\right)^0} \right)$$

$$= \underline{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}} + 2 \cdot \frac{1}{\underline{1-\frac{2}{3}}} \underline{- 3}$$

$$= \frac{3}{2} + \cancel{2} \cdot 3 - \cancel{3}$$

$$= 4{,}5$$

Afsnit 9.3: Konvergens-tests for positive rækker

Sætning 8 (Integral-kriteriet):

Hvis $a_n = f(n)$,

hvor f er positiv, kontinuert og ikke-voksende

på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$

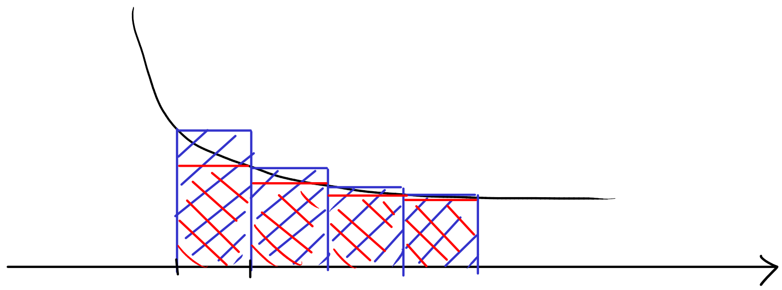
da gælder, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_N^{\infty} f(t)\,dt \text{ konvergerer}$$

Bevis:



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_{N-1} + \sum_{n=N}^{\infty} a_n = S_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

$$= S_{N-1} + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} f(n)}_{\geq \int_N^{\infty} f(t)\,dt} = S_N + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)}_{\leq \int_N^{\infty} f(t)\,dt}$$

D.v.s.

$$\underbrace{S_N}_{\text{sum af } N \text{ tal.}} + \int_N^{\infty} f(t)\,dt \overset{(*)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{(**)}{\leq} \underbrace{S_{N+1}}_{S_{N+1} < \infty} + \int_N^{\infty} f(t)\,dt$$

D.v.s. $S_N < \infty$

Da $\int_N^{\infty} f(t)\,dt \geq 0$, konkluderes følgende

$\overset{(*)}{\leq}$: $\{a_n\}$ konvergerer $\Rightarrow$ $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ konvergerer

$\overset{(**)}{\leq}$: $\int_N^{\infty} f(t)\,dt$ konvergerer $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ konvergerer $\square$

Integraler kan også bruges til at approksimere summer. Vi har allerede set, hvordan $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ blev approksimeret ret præcist v.h.a. integraler.

Eks 1 generaliserer H_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergerer,} & \text{hvis } p>1 \\ \text{divergerer,} & \text{hvis } p\leq 1 \end{cases}$$

Sætning 9 (Sammenlignings-kriteriet)

Hvis $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : 0 \leq a_n \leq K b_n$,

da gælder:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergerer

Bevis: Læs selv.

Eks 3

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ konvergerer iflg. Sætning 9a:

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}, \quad \text{for } n \geq 1$$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ divergerer iflg. Sætning 9b:

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}, \quad \text{for } n \geq 2$$

Sætning 10 (Grænseværdi-sammenligningskriteriet):

Hvis

$\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er positive følger, og

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq 0 \quad (\text{evt.} = \infty)$$

da gælder

(a) $\left(L < \infty \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverger}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $\left(L > 0 \text{ og } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergerer mod } \infty\right) \Rightarrow$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer mod ∞.

Bevis:

(a) $L < \infty$

$\Downarrow$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \frac{a_n}{b_n} < L + 1$, iflg Def. 2

ε i Def. 2

$\Downarrow$ $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n < (L+1)\, b_n$

D.v.s.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer,
iflg. Sætning 9(a)

(b) bevises på tilsvarende vis v.h.a. Sætning 9(b).

$\square$

Sætning 11 (Kvotient-kriteriet (ratio test))

Hvis

- $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0$ ($a_n > 0$ ultimately)
- $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer eller er $+\infty$

da gælder:

(a) $0 \leq \rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $1 < \rho \leq \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

((c) $\rho = 1$: ingen information)

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{konvergerer}$$

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1 \text{ for } n \to \infty$$

$\Rightarrow$ konvergerer/divergerer ?

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2n+1}{n^2} \to 1 \text{ for } n\to\infty$$

$\Rightarrow$ konvergerer/divergerer ?

Sætning 12 (Rod-kriteriet):

Hvis

$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > 0$, og

$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > -\infty$ (eksisterer eller er $+\infty$)

da gælder

(a) $0 \leq \sigma < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

(b) $1 < \sigma \leq \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer mod ∞

(c) $\sigma = 1 \Rightarrow$ konvergerer / divergerer