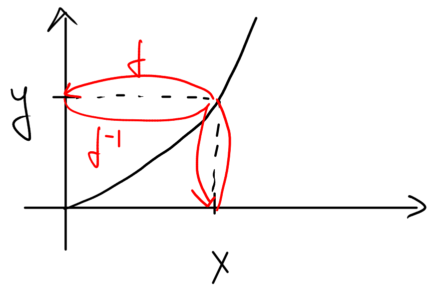
Hvis $f : A \to B$ er bijektiv, har du en invers $f^{-1} : B \to A$ (f er invertibel).

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$$



D.v.s. $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$

- f er ikke invertibel
- g er invertibel

$$y = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{y}$$

D.v.s.

$$g^{-1}(y) = \frac{1}{y}$$

Check:

$$g^{-1}(h(x)) = g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$$

- h er invertibel

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

D.v.s.

$$h(y) = \sqrt{y}$$

Check:

$$h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

Man kan kombinere funktioner til nye funktioner:

Lad $f: A \to \mathbb{R}$ og $g: A \to \mathbb{R}$.
Da er $f+g$ og $f \cdot g$ funktioner fra A til $\mathbb{R}$ defineret ved

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

  Eks: $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2+1$
  $(f+g)(x) = x^2 + x^2+1 = 2x^2+1$

- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

  Eks: $(f \cdot g)(x) = x^2(x^2+1) = x^4+x^2$

Lad $f: B \to C$ og $g: A \to B$
Da er $f \circ g$ en funktion fra A til C defineret ved

- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Sammensat funktion

  Eks: $(f \circ g)(x) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 = x^4+2x^2+1$
  $(g \circ f)(x) = g(x^2) = (x^2)^2+1 = x^4+1$

  $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(x^2) = x^4$
  $f^3(x) = (f \circ (f \circ f))(x) = f(x^4) = x^6$

  $g^2(x) = g(x^2+1) = (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$

Lidt mere terminologi:

f er voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

f er strengt voksende, hvis

$$\forall x_1, x_2 \in Dm(f) : \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Tilsvarende for (strengt) aftagende

Eks:

Voksende:

$f(x) = x$

$f(x) = \sqrt{x}$ — strengt voksende

$f(x) = 5$

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^2$

Aftagende:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{array}\right\} \text{strengt aftagende}$$

$f(x) = 5$

Hvis f er aftagende eller voksende, kaldes den monoton

Relationer (afsnit 9.1)

Beskriver en sammenhæng mellem elementer i en eller flere mængder.

Eks:

$<$, $=$, $|$, „er barn af" (binære relationer)

(CPR-nr, navn, adresse, studium)

Def. 9.1.1: Lad A og B være mængder.
En binær relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

Eks:

$$R = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \tfrac{1}{x} \}$$
$$= \{ (1,1), (2,\tfrac{1}{2}), (3,\tfrac{1}{3}), \dots \}$$

NB: $(2,\frac{1}{2}) \in R$, men
$(\frac{1}{2}, 2) \notin R$

Eks:

$$S = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b \}$$
$$= \{ (0,1), (0,2), (1,2), (0,3), \dots \}$$

$(1,0) \notin S$

Relationer er en generalisering af funktioner (hvorfor?)

Def. 9.1.2: Lad A være en mængde
En relation på A er en relation fra A til A,
d.v.s. en delmængde af $A \times A$.

(Fra nu af kun denne slags relationer)

Eks: S ovenfor er en relation på $\mathbb{N}$.

S er relationen $<$
Man skriver normalt ikke $(0,1) \in <$
Derimod $0 < 1$.

$(a,b) \in R$
$a \, R \, b$
„ a er relateret til b gennem R".

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

Man kan repr. rel. v.h.a.

- Opremsning
- Mængde-bygger-notation

} har vi allerede set

- Matricer (Hvis A, B endelige)
- Orienterede grafer (Hvis $A = B$ og A endelig)
  (digraphs)

Matricer

Eks: Relation på $\{1,2,3\}$:

$R = \{(1,3), (2,2), (2,3), (3,1)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Grafer vender vi tilbage til...

Egenskaber

Def. 9.1.3: R: relation på A

R er refleksiv, hvis

$$(a,a) \in R \quad \text{for alle } a \in A$$

Eks:

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,2), (2,1), (3,3\}$ ÷

$S = \{(1,1), (1,2), (2,2)\}$ ÷

$T = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3)\}$ ✓

Andre eksempler:

÷ : $<$, $\neq$

✓ : $\leq$, $=$, $|$, $\equiv$

Hvordan ser man på matrice-repr., om rel. er refl.?

Def. 9.1.4: R: relation på A.

R er symmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R \quad \text{for alle } (a,b) \in R$$

Eksempler?

÷: R, $<$, $|$

✓: S, T, $=$, $\equiv$, $\neq$

Def. 9.1.4:

R er antisymmetrisk, hvis

$$(a,b) \in R \land (b,a) \in R \Rightarrow a = b, \quad \text{for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \lor a = b, \quad \text{for alle } a,b \in A$$

Eller

$$(a,b) \in R \land a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R, \quad \text{for alle } a,b \in A$$

Eks:

✓: $\{(1,1), (1,2), (3,2)\}$, $=$, $\leq$, $<$, $|$

✗: $\{(1,1), (1,2), (2,1)\}$, $\equiv$, $\neq$

Def. 9.1.5: R relation på A

R er transitiv, hvis

$$(a,b) \in R \land (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \quad \text{for alle } a,b,c \in R,$$

Eks: $\{(1,2), (1,3), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

$(1,2), (2,3) \rightarrow (1,3)$ ✓

$(1,3), (3,2) \rightarrow (1,2)$ ✓

$((1,3), (3,3) \rightarrow (1,3)$ ✓$)$

$(2,3), (3,2) \rightarrow (2,2)$ ✗ $\Rightarrow$ <u>ikke</u> transitiv

✓ : $=$, $<$, $|$, $\equiv$

✗ : $\neq$