Matricer (afsnit 2.6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 2 rækker

3 søjler

A er en 2×3 - matrix

Matrice-regning kan bruges til at løse ligningssystemer med flere ubekendte.
Bruges også meget til computergrafik.

Addition

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+1 & 3+1 & 4+0 \\ 1+0 & 0+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

A og B kan lægges sammen, fordi de har samme dimensioner, men de kan ikke ganges.

Multiplikation:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3 \times 3 \text{ matrix}$$

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 2\cdot1 + 3\cdot1 + 4\cdot2 & 2\cdot2 + 3\cdot1 + 4\cdot0 & 2\cdot0 + 3\cdot1 + 4\cdot1 \\ 1\cdot1 + 1\cdot0 + 2\cdot2 & 1\cdot2 + 0\cdot1 + 2\cdot0 & 1\cdot0 + 0\cdot1 + 2\cdot1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 7 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \end{bmatrix} = E \qquad 2 \times 3\text{-matrix}$$

$$e_{ij} = a_{i1} d_{1j} + a_{i2} d_{2j} + a_{i3} d_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} d_{kj}$$

Generelt:

$$k\,\underset{m}{\boxed{F}} \times m\,\underset{n}{\boxed{G}} = k\,\underset{n}{\boxed{H}}$$

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^{m} f_{il}\, g_{lj} \qquad - \quad m \text{ mult.}$$

H har $k \cdot n$ pladser

D.v.s. ialt $k \cdot m \cdot n$ mult.

D·A er ikke defineret:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

A·A er heller ikke defineret.

Men det er D·D, for D er kvadratisk,

d.v.s. #rækker = #søjler

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+1 \\ 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+0 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

D.v.s. matrix-mult. er <u>ikke kommutativ</u>.

Gælder der så heller ikke, at

$$D \cdot D^2 = D^2 \cdot D \quad ?$$

Jo, for matrix-mult. er <u>associativ</u>:

$$(M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$$

<u>Neutrale matricer</u>

$$A + O = A$$

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Neutral</u> matrix m.h.t. $+$:

$$m_{ij} = 0$$

$A \cdot I_3 = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$I_2 \cdot A = A$

<u>Neutral</u> matrix m.h.t. $\cdot$:

$m_{ii} = 1$

$m_{ij} = 0, \quad i \neq j$

<u>Identitetsmatrix</u>

<u>Transponering</u>

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Byt om på rækker og søjler : $m^t_{ij} = m_{ji}$

$$D^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kvadratiske matricer : spejl omkring diagonalen

Hvis $M = M^t$, er M <u>symmetrisk</u>

0-1-matricer

$0 \sim$ Falsk

$1 \sim$ Sand

$M_1 \odot M_2$ beregnes som $M_1 \cdot M_2$, men med

$+ \rightarrow \vee$

$\cdot \rightarrow \wedge$

Eks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Def. 2.6.10:

$$M^{[r]} = \underbrace{M \odot M \odot \ldots \odot M}_{r \text{ gange}}, \quad \text{for } r \in \mathbb{Z}^+$$

$$M^{[0]} = I_n$$

Husk: 0-1-matricer bruges til at repræsentere relationer. Det bringer os tilbage til <u>afsnit 9.4</u> om bl.a. <u>transitiv lukning</u>

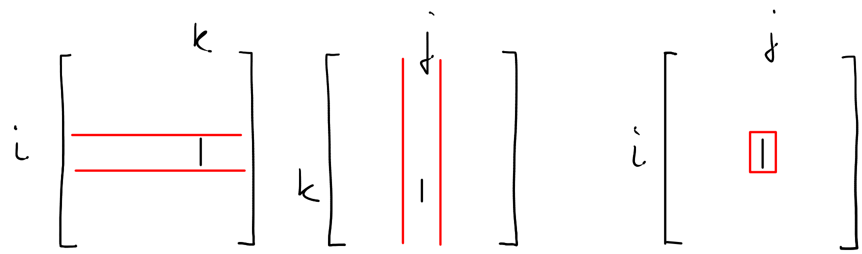
Lad $M_R = [a_{ij}]$ og $M_{R^2} = [b_{ij}]$

Da gælder:

$b_{ij} = 1 \iff \exists k: a_{ik} = 1 \wedge a_{kj} = 1$:

$$G_R: \quad i \to k \to j \quad \Rightarrow \quad G_{R^2}: \quad i \xrightarrow{k} j$$

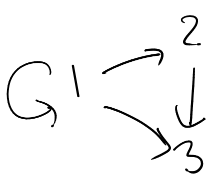
D.v.s.



$M_R \qquad\qquad M_R \qquad\qquad M_{R^2}$

D.v.s. $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}$. D.v.s. $M_{R^2} = M_R \odot M_R$

Eks:



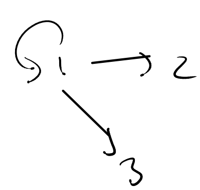
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & \cdots \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 & \cdots \\ 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D.v.s. R^2:



D.v.s. matricen, der repr. den trans. lukning af R kan beregnes som

$$M_{R_t} = M_R + M_{R^2} + M_{R^3} + \dots + M_{R^n}$$
$$= M_R + M_R^{[2]} + M_R^{[3]} + \dots + M_R^{[n]}$$

Hvordan beregnes M_{R_t} effektivt?

Første idé:

Beregn $M_R^{[2]}, M_R^{[3]}, \dots, M_R^{[n]}$ v.h.a. $n-1$ matrice-mult. à $O(n^3)$

Addér matricerne (eller undlad at overskrive 1-taller med 0)

I alt $O(n^4)$.

Anden idé:

Samme idé som modulær eksp.: $O(n^3 \log n)$

DM534 senere i dag

Tredje idé:

Warshalls Algoritme: $O(n^3)$

I graf-repr. gælder:

Vej i R $\Rightarrow$ Kant i R_t

Indre knude i en vej: knude som hverken er start- eller slut-knude i vejen $\circ \to \circ \to \circ \to \circ \to \circ$

Lad $I(p)$ være mængden af indre knuder i vejen p

Ide:

Lad $A = \{1, 2, \ldots, n\}$

$W_0 = M_R$

W_i repr. alle veje P, som opfylder, at
$I(P) \subseteq \{1, 2, \ldots, i\}$

W_n repr. R_t

Konstruér W_{i+1} ud fra W_i:

Tilføj alle veje P, som opfylder
(1) $I(P) \subseteq \{1, 2, \ldots, i+1\}$
(2) $i+1 \in I(P)$

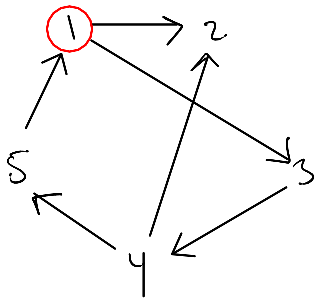
De veje, som ikke opfylder (2), er allerede repr. i W_i.

Warshalls Alg $(M_R = [m_{ij}])$

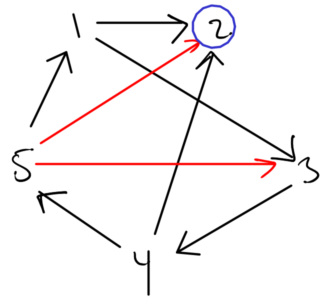
```
// Konstruer W_0:
for i:=1 til n
    for j:=1 til n
        w_ij = m_ij
for k:=1 til n
    // konstruer W_k ud fra W_k-1:
    for i:=1 til n
        for j:=1 til n
            hvis w_ik = 1 og w_kj = 1
                w_ij := 1
```

Eks:

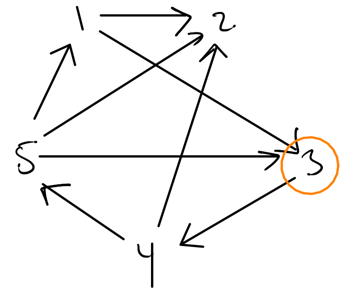
$W_0 = M_R$:



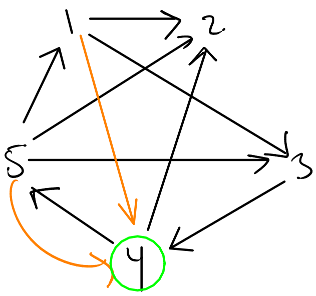
W_1:



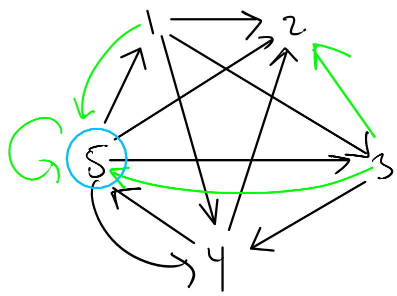
$W_2 = W_1$:



W_3:



W_4:



W_5: