

Sidste gang: (på højre side)

- De Morgans Love for kvantorer:

$$\neg \forall x: P(x) \Leftrightarrow \exists x: \neg P(x)$$

$$\neg \exists x: P(x) \Leftrightarrow \forall x: \neg P(x)$$

- Indlejrede kvantorer:

$$\uparrow \forall x: \exists y: P(x, y)$$

$$\uparrow \nexists y: \forall x: P(x, y)$$

$$\uparrow \neg \forall x: \exists y: P(x, y)$$

$$\uparrow \exists x: \forall y: \neg P(x, y)$$

- Regler for logiske slutninger

(Hvad kan man konkludere, og hvad kan man ikke konkludere)

$p \Rightarrow q$ medfører

hverken $q \Rightarrow p$

eller $\neg p \Rightarrow \neg q$

men er ækv. med

$$\neg q \Rightarrow \neg p$$

skal vi bruge i dag...

Beris-metoder (Afsnit 1.8)

Hovedtyper:

(Om lidt kommer nogle eksempler.

I kommer til at se mange flere i løbet af kurset, og der er mange flere i afsnit 1.8.)

• Direkte beris

Benyttes, at $(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$

regn inde kakao regn kakao
↓ ↓ ↓ ↓
 n ulige $n = 2k+1$ $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ n^2 ulige
 $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

• Kontraposition

Benyttes, at $\boxed{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

billet tog $\neg$ tog $\neg$ billet
↓ ↓ ↓ ↓
 n^2 ulige n ulige n lige n^2 lige

• Modstrid

Benyttes, at $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$

$\exists$ måned med 2 fødselsdage ≤ 12 personer $\exists$ måned med 2 fødselsdage
A knægt A ridder $\wedge$ A knægt A ridder

I næste uge

• Induktionsberis

Eks: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

I de første eks. skal vi bruge flg. def.:

Def 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:

$$n \text{ lige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$$

$$n \text{ ulige} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k + 1$$

Two heltal har samme paritet, hvis begge er lige eller begge er ulige.

Eks 1: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n ulige $\Rightarrow n^2$ ulige

Beris: Direkte beris

Def. 1 $\Updownarrow$ n ulige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k+1$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{\in \mathbb{Z}}) + 1$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 ulige

□

Eks 8: Lad $n \in \mathbb{Z}$. Da gælder:
 n^2 ulige $\Rightarrow n$ ulige

Direkte beris ser ikke ud til at fungere:

$$n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = \pm \underbrace{\sqrt{2k+1}}_{\text{lige eller ulige??}}$$

Beris: Kontraposition

Viser, at n lige $\Rightarrow n^2$ lige:

Def. 1 $\Updownarrow$ n lige
 $\exists k \in \mathbb{Z}: n = 2k$
 $\Downarrow$ $\exists k \in \mathbb{Z}: n^2 = 4k^2 = 2 \cdot \underbrace{2k^2}_{\in \mathbb{Z}}$
Def. 1 $\Updownarrow$ n^2 lige

□

Eks 1 og 8 tilsammen viser, at

$\forall n \in \mathbb{Z}: n \text{ ulige} \Leftrightarrow n^2 \text{ ulige}$

Eks: Der er to i dette lokale, som har fødselsdag i samme måned.

Bevis:

Antag til modstrid, at der ikke er en måned med to fødselsdage.

Da er der ≤ 12 mennesker i lokaleret. ⚡



NB: „to fødselsdage“ betyder
„mindst to fødselsdage“.
(I modsætning til
„præcis to fødselsdage“.)

Ydruelige "tricks": (Afsnit 1.9)

Split op

Eks: (delresultater)

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p), \text{ som i Eks 1+8}$$

$$(p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3) \Leftrightarrow (p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow p_3 \Rightarrow p_1) \quad \begin{array}{l} \text{kan bruges i} \\ \text{ops. 21 til næste} \\ \text{uge} \end{array}$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad \begin{array}{l} \text{vender vi tilbage til} \\ \text{i næste uge} \end{array}$$

Eks: (flere tilfælde)

$$\text{Påstand: } \forall n \in \mathbb{Z} : \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \geq \frac{n}{2}$$

$$\begin{array}{|l} \text{NB: } \lfloor \rfloor \text{ rund ned} \\ \quad \lceil \rceil \text{ rund op} \end{array}$$

Bevis: (to direkte beviser)

Tilfælde 1: n ulige

| dette tilfælde er $n+1$ lige.

D.v.s. $\frac{n+1}{2}$ er et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}$$

Tilfælde 2: n lige

| dette tilfælde er $\frac{n}{2}$ et heltal.

$$\text{D.v.s. } \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$$

□

„Eks 18": Lad $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

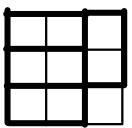
Kan et $n \times n$ skakbræt dækkes af dominobrikker?

Dominobrik: dækker præcis to felter

Ingen brikker må overlappe eller stikke ud over brættet.

Start evt. med simple special-tilfælde for at opnå forståelse:

$n=2$:  Ja

$n=3$:  Nej, vi får brug for en halv brik

n ulige: Nej, fordi:

Hver brik dækker to felter. D.v.s. tilsammen dækker brikkerne et lige # felter

Men ifølge Eks 1 er n^2 ulige

n lige: Ja:

Dæk hver række med $n/2$ brikker

Konstruktiv eksistensbevis:

Vi viser, at der findes en gyldig dækning af brættet ved at beskrive en konkret dækning.

Eks: Har $f(x) = x^4 - x^2 - 1$ et nulpunkt?

Ja, fordi $f(0) = -1 < 0$ og
 $f(2) = 16 - 4 - 1 = 11 > 0$

Ikke-konstruktiv eksistensbevis:

Vi har ikke fundet 0-punktet, men vi har bevist, at det eksisterer.

Eksisterer der en unik løsning til $f(x) = 0$?

Nej, der er også et nulpunkt nl. -2 og 0 .

Lidt sjovere eksempel: Eks 12

Tilbage til skatbræt, domindbrikker og "tricks"...

Eks: $n \times n$ skakbræt

Fjern to modstående hjørner.

Kan brættet dækkes af domino-brikker?

n ulige: Nej, da $n-2$ ulige

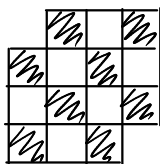
n lige: Først simple specielle tilfælde:

$n=2$:



Nej

$n=4$:



Nej

Generelt:

Antag til modstrid, at brættet kan dækkes af dominobrikker.

Da har brættet lige mange sorte og hvide felter.

Men vi startede med et bræt, hvor hver række havde lige mange sorte og hvide felter, og fjernede to sorte eller to hvide felter. D.v.s. der er ikke lige mange sorte og hvide felter ↴

Lidt terminologi:

Sætning (theorem): Vigtigt udsagn
(som er bevist at være sandt -
ellers er det bare en påstand (*conjecture*))
D.v.s. et udsagn, som man ofte
refererer til.

Lemma: Hjælpe-sætning
Bruges til at strukturere et langt bevis.

Korollar: Følge-sætning.
Udsagn, som følger umiddelbart af en sætning.

Noget gange bruger man også:

Proposition: Mindre vigtigt udsagn