

Sidste gang: Følger & rækker (afsnit 2.4)

Eks: $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$

$$\{a_n\} = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle \quad \text{følge}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{række}$$
$$= H_n \quad (\text{n'te harmoniske tal})$$

Coupon collector's problem:

I gennemsnit skal man købe nH_n øsker for at samle alle n klistomærker

Mandelbrot-fraktalen

$$X_n = \begin{cases} 0 & , n=0 \\ X_{n-1}^2 + c & , n \geq 1 \end{cases}$$

c tilhører Mandelbrot-mængden, hvis X_n er begrænset.

$$\sum_{i=0}^n ar^i = a \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (\text{Geometrisk række})$$

Eks: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

$$\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{i=0}^n a + id = (n+1)a + d \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{Aritmetrisk række})$$

Eks: $\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) = 1 + 3 + 5 + \dots = (n+1)^2$$

Adams afsnit 9.1 : Følger og konvergens

En følge kan enten konvergere eller divergere.

Definition 2 :

Lad $\{a_n\}$ være en uendelig følge, og lad $L \in \mathbb{R}$.

Hvis følgende gælder :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

Da konvergerer a_n mod grænseværdien L .

Dette skrives også $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

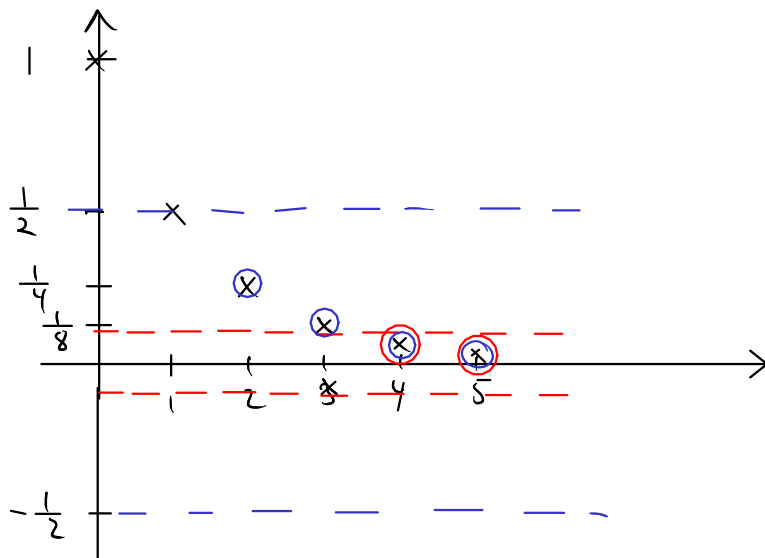
eller $a_n \rightarrow L$ for $n \rightarrow \infty$.

↑
"går imod"

↑
"gænder mod"

Eks: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ konvergerer mod 0:



For $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kunne man f.eks. vælge $N = 2$.

For $\varepsilon = \frac{1}{10}$ kunne man vælge $N = 4$.

Generelt :

$$\text{Vælg } N = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil$$

En sekvens, som ikke konvergerer, divergerer.

Ex 5:

$\{\frac{n-1}{n}\} = \langle 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \rangle$ konverger mod 1.

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Def. 2: Vælg f.eks. $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$

$\{n\} = \langle 1, 2, 3, \dots \rangle$ diverger mod ∞ .

$\{-n\} = \langle -1, -2, -3, \dots \rangle$ diverger mod $-\infty$.

$\{(-1)^n\} = \langle -1, 1, -1, \dots \rangle$ diverger.

$\{(-1)^n n\} = \langle -1, 2, -3, 4, \dots \rangle$ diverger.

Regneregler for grænseværdier (S. 198 ø):

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konvergerer:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\begin{aligned} \text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{n+1} - \frac{2}{n+1} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &= 2 - 0 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Tilsvarende for $-$ og $\cdot$
og for $/$, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\text{Eks: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2 \cdot 1 = 2$$

Eks 6a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n - 1}{5n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{2-0-0}{5+1-3} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Tommelfingerregel: Kig på de mest betydende led (dem, der vokser hurtigst). I dette tilfælde: $2n^2$ og $5n^2$.

Øøtning 3:

$$(a) |x| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$$(b) \forall x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Bevis:

(a): (Beviset er en smule anderledes end i bogen)

Af Def. 2 fås:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x^n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow n \ln |x| < \ln \varepsilon$$

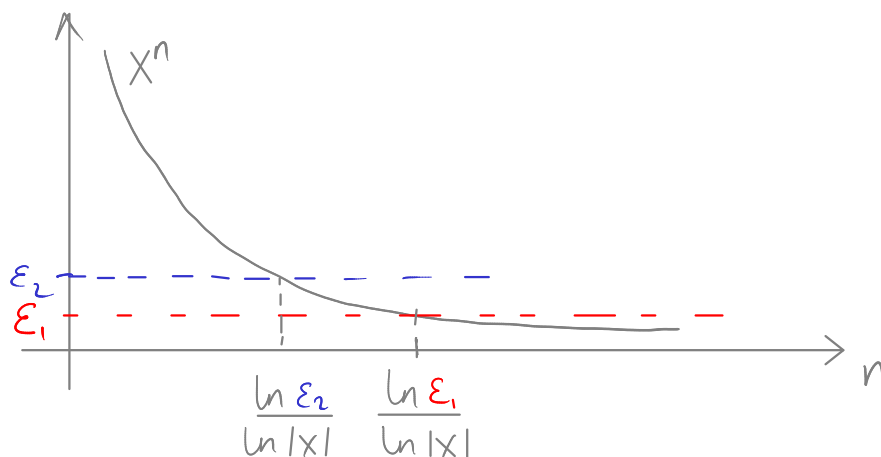
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|}, \quad \text{da } |x| < 1 \Rightarrow \ln |x| \neq 0$$

under ulighedstegnet, da vi dividerer med noget negativt

D.v.s.

$$\forall \varepsilon > 0 : \forall n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |x|} : |x^n| < \varepsilon$$

Illustration:



$$(b) \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \cdots |x|}^n}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \cdots |x|}^{\lceil |x| \rceil}}{1 \cdot 2 \cdots \lceil |x| \rceil} \cdot \frac{\overbrace{|x| \cdot |x| \cdots |x|}^{n - \lceil |x| \rceil}}{(\lceil |x| \rceil + 1) \cdots n} \\
 &= \underbrace{\frac{|x| \cdot |x| \cdots |x|}{1 \cdot 2 \cdots \lceil |x| \rceil}}_C \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 1}}_{< 1} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\lceil |x| \rceil + 2}}_{< 1} \cdots \underbrace{\frac{|x|}{n-1}}_{< 1} \cdot \frac{|x|}{n} \\
 &< \frac{C|x|}{n}
 \end{aligned}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C|x|}{n}, \quad \text{hvor } C = \frac{x^{\lceil |x| \rceil}}{\lceil |x| \rceil!} \\
 &= C|x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \quad \text{ifj. regneregler for grænseværdier} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Klar, at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| \geq 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = 0$$

D.v.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

Eks 10:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n + 5^n}{5^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n + \left(\frac{4}{5} \right)^n + 1 \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1, \\&\quad \text{iff. regelene for grænseverdier} \\&= 0 + 0 + 1, \quad \text{iff. Sætning 3(a).}\end{aligned}$$

Afsnit 9.2: Uendelige rækker

Vi så nogle uendelige rækker allerede sidste gang.
F.eks.:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 2$$

Eller mere generelt:

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}, \quad \text{hvis } r \neq 1 \quad (\text{Geometrisk række})$$

D.v.s.

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{0-1}{r-1} = \frac{1}{1-r}, \quad \text{hvis } |r| < 1$$

↑
regne regel + Sætning 3(a)

Vi så også et eksempel på en **aritmetrisk række**:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad - \quad \text{div konverger}$$

Def. 3:

Lad $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Da kaldes s_n den n 'te partielle sum af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
og $\{s_n\}$ kaldes en afsnitsfølge.

Hvis $\exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$,

siges $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ at konvergere mod s .

Dette skrives også som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Eks

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \begin{cases} \text{konvergerer mod } \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \\ \text{divergerer,} & \text{hvis } r \leq -1 \end{cases}$$

Eks:

$$s_n = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^i$$

$$\{s_n\} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots \right\rangle$$