

Logik (afsnit 1.1-1.3)

Matematisk sprog

Middel til at udtrykke sig kort og præcist
- giver overblik og klarhed.

(Logisk) udsagn: Enten sandt eller falsk

Eks: $1+1=2$ S

$3>5$ F

Logiske udsagn kan sættes sammen v.h.s.

logiske operatorer: $\vee \wedge \neg \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$

$\underbrace{1+1=2 \vee 3>5}_\text{sammensat udsagn} \quad S$

p, q : udsagn (udsagns-variable)

$p \vee q$: „ p eller q “ (ikke enten eller)

mindst et af udsagnene p og q er sandt

$1+1=2 \wedge 3>5$ F

$p \wedge q$: „ p og q “

både p og q er sandt

Logiske operationer kan defineres u.h.a. af
Sandhedstabeller:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
S	S	S	S
S	F	S	F
F	S	S	F
F	F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$	$p \cdot q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	0

$\neg p$: „ikke p “
 p er falsk

p	$\neg p$	p	$1-p$
S	F	1	0
F	S	0	1

Eks fra før:

$$\neg(1+1=2) \quad \text{F} \quad 1+1 \neq 2$$

$$\neg(3>5) \quad \text{S} \quad 3 \leq 5$$

$p \Rightarrow q$ "p medfører q" implikation
 hvis p er sand, er q også sand
 "hvis p, så q"
 "p, kun hvis q"

Bogen bruger både $\Rightarrow$ og $\rightarrow$
 Jeg bruger kun $\Rightarrow$

Eks: 3. sep. i dag $\Rightarrow$ Lene forelæser (~~S~~/F) ?
 3. sep. i dag $\Rightarrow$ Lene hedder Jens S/(~~F~~) ?
 10. sep. i dag $\Rightarrow$ Lene hedder Lene (~~S~~/F) ?
 10. sep. i dag $\Rightarrow$ Lene giver kage (~~S~~/F) ?

$p \Rightarrow q$ udtrykker blot, hvad der sker, hvis p er opfyldt.

p	q	$p \Rightarrow q$	
S	S	S	} S medfører kun S.
S	F	F	
F	S	S	} F medfører "hvad som helst"
F	F	S	

Eks: p : du har købt billet

q : du kan tage toget

$p \Rightarrow q$

„Hvis du har købt billet, kan du tage toget“

Hvad hvis du ikke har købt billet?

Det siger udsagnet ikke noget om.

Hvad hvis du ikke kan komme med toget?

Så har du ikke købt billet.

$p \Rightarrow q$ er nemlig det samme som $\neg q \Rightarrow \neg p$:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$\neg p$	$\neg q$
S	S	S	S	F	F
S	F	F	F	F	S
F	S	S	S	S	F
F	F	S	S	S	S

D.v.s. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

(Tabel 1.3.7, 2. linje)
(s.26)

Bogen bruger både $\Leftrightarrow$ og $\equiv$

Jeg bruger altid $\Leftrightarrow$

$p \Leftrightarrow q$ "p hvis og kun hvis q" bimplikation
 p og q har samme sandhedsværdi
 "p hvis q"
 "p er enbetydende med q"
 "p og q er ækvivalente"

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
S	S	S	S	S	S
S	F	F	F	S	F
F	S	F	S	F	F
F	F	S	S	S	S

$$\begin{aligned}
 \text{D.v.s. } (p \Leftrightarrow q) &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \\
 &\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)
 \end{aligned}$$

Eks fra før:

Hvis du har købt billet, kan du tage toget $p \Rightarrow q$
 $\Uparrow$ Hvis du kan tage toget, har du købt billet $q \Rightarrow p$
 Hvis du ikke har købt billet,
 kan du ikke tage toget $\neg p \Rightarrow \neg q$

Eks 7 s. 18 (afsnit 1.2)

Riddere taler altid **sandt**

Knægte **lyver** altid

(1): A siger „B er ridder“

(2): B siger „Vi er forskellige slags“

Hvad er A og B?

a: A er ridder. D.v.s. $\neg a$: A er knægt

b: B ————— „—————“ $\neg b$: B —————

Kan A være ridder?

a $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ b $\stackrel{(2)}{\Rightarrow}$ $\neg a$ $\downarrow$

a $\Rightarrow$ a $\wedge$ b $\Rightarrow$ a $\wedge$ $\neg a$

modstrid: falsk, uanset sandhedsværdien af a.

D.v.s. A er knægt (hvis der er en løsning)

$\neg a$ $\stackrel{(1)}{\Rightarrow}$ $\neg b$

D.v.s. B er knægt

Kunne også løses v.h.s. sandhedstabel:

a	b	(1)	(2)
S	S		F
S	F	F	
F	S	F	
F	F	S	S

eneste mulighed

$p \oplus q$: eksklusiv eller
 enten p eller q
 p og q er forskellige

D.v.s $p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \Leftrightarrow q)$
 og $p \oplus q \Leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow q$ } dvs. $\neg(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \Leftrightarrow q$

p	q	$p \oplus q$
S	S	F
S	F	S
F	S	S
F	F	F

Hvordan sætter man parenteser?

Procedurs : $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \vee$

Ikke konsensus om $\oplus$'s placering i hierarkiet.
Løsning: brug parenteser.

$$\neg p \vee q \begin{cases} (\neg p) \vee q \\ \neg(p \vee q) \end{cases} \quad ?$$

$$p \vee q \wedge r \begin{cases} (p \vee q) \wedge r \\ p \vee (q \wedge r) \end{cases} \quad ?$$