

Sidste SFV: prøve-eksamen

MM537: uge 48

DM549: uge 50

Eksamen: mandag d. 11/1

Eksamensregler:

Ingen Internet (kun til aflevering)

Kun én aflevering.

pdf-fil, som indeholder alt

Ingen ipads o.l. (ingen vendt skærm)

Husk at begrunde dine svar!

Sidste gang: Relationer

R er en binær relation på A , hvis
 $R \subseteq A \times A$

Exs:

$$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\}$$

refl., anti-sym., transitiv

Reflexiv lukning af R_1 : R_1

Symmetrisk lukning af R_1 : $\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b \vee a \geq b\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Transitiv lukning af R_1 : R_1

$$R_2 = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$$

anti-sym

Reflexiv lukning af R_2 : $R_2 \cup \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

Symmetrisk lukning af R_2 : $R_2 \cup \{(2,1), (3,2), (1,3)\}$

Transitiv lukning af R_2 :

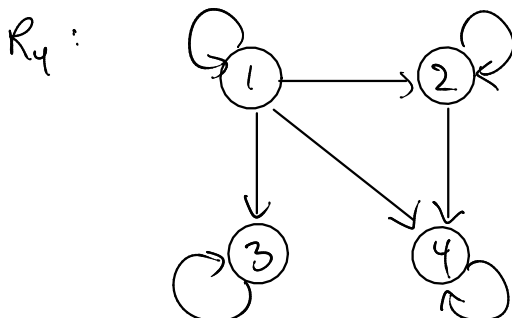
$$R_2 \cup \underbrace{\{(1,3), (2,1), (3,2)\}}_{R_2^2} \cup \underbrace{\{(1,1), (2,2), (3,3)\}}_{R_2^3}$$

R_3 rel. på $\{1,2,3\}$ repr. ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(samme paritet)

refl., symm. og transitiv



(går op i)

refl., anti-sym., transitiv

Symmetrisk lukning af R_4 :

$$R_4 \cup \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2)\}$$

Afsnit 9.1:

Relationer kan sættes sammen (præcis som funktioner):

$$S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in S\}$$

Eks:

$$R = \{(1, \underline{2}), (\underline{3}, \underline{1})\}$$

$$S = \{(\underline{1}, 3), (\underline{2}, 2), (\underline{2}, 3)\}$$

$$S \circ R = \{(\underline{1}, \underline{2}), (\underline{1}, \underline{3}), (\underline{3}, \underline{3})\}$$

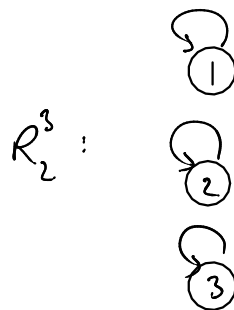
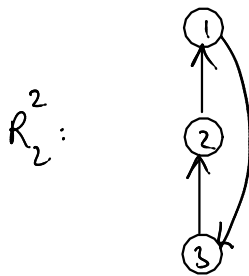
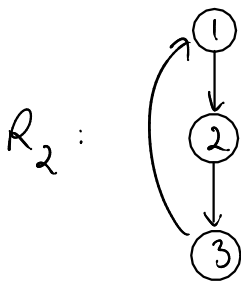
$$R \circ S = \{(1, 1), (2, 1)\}$$

$$R^2 = R \circ R$$

$$\begin{aligned} R_{<}^2 &= \{(a, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists b \in \mathbb{N} : a < b \wedge b < c\} \\ &= \{(a, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid c - a \geq 2\} \end{aligned}$$

$$R_{=}^2 = R_{=}$$

$$R_{\neq}^2 = A \times A$$



Transitiv lukning af R_2 : $R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3$

Transitive lukning af R

$$\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^{|A|}$$

Graf-fortolkning:

G_R^2 indeholder en kant for hver vej af lgd. 2 i G_R
 G_R^3 ————— " ————— 3 ————— "
⋮

Ingen veje længere end $|A|$ i G_R .

Relationer kan også kombineres vha. mængde-operationer:

$$\left. \begin{array}{l} R_1 \cup R_2 \\ R_1 \cap R_2 \\ R_1 - R_2 \\ R_1 \oplus R_2 \end{array} \right\} \text{ se } \underline{\text{Eks 17-19}}$$

Ækvivalensrelationer (afsnit 9.5)

Def. 9.5.1:

En relation, som er

- refleksiv
- symmetrisk
- transitiv

kaldes en ækvivalensrelation.

Eks:

$$\sqrt{}: =, \equiv$$

$$\forall: \leq, |, \neq$$

Def. 8.5.2:

Hvis R er en ækv. rel., og $(a, b) \in R$,
da er a og b ækvivalente.

D.v.s. hvis R er en ækv. rel., og $(b, a) \in R$,
da er a og b ækvivalente (R er symmetrisk).

Def. 9.5.3:

Lad R være en ækv. rel. på A og
lad $a \in A$.

Da er a 's ækvivalensklasse

$$[a]_R = \{ b \mid (a, b) \in R \} = \{ b \mid (b, a) \in R \}$$

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$[1]_R = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

$$[3]_R = \{0, 3, 6, 9, \dots\} = [0]$$

O.S.U.

Bemærk: $[0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] = \mathbb{N}$ ($\dot{\cup}$: „disjunkt forening“)

Eks: $R = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0] = \{0\}$$

$$[1] = \{1\}$$

$$[2] = \{2\}$$

$\vdots$

$$\text{Igen: } \mathbb{N} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} [2] \dot{\cup} \dots$$

Øctning 9.5.1:

Lad R være en ækv.rel. på A .

Da gælder

$$aRb \quad (i)$$

$$\Updownarrow [a] = [b] \quad (ii)$$

$$\Updownarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset \quad (iii)$$

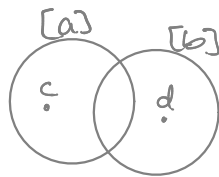
Bevis:

Vil bevise $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$

$$\underline{aRb \Rightarrow [a] = [b]} : (i) \Rightarrow (ii)$$

Antag, aRb

Kunne man forestille sig :



Nej:

$$\underline{[a] \subseteq [b]} :$$

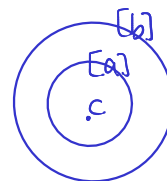
$$\Updownarrow c \in [a]$$

$$\Updownarrow cRa, \text{ da } R \text{ er } \underline{\text{symmetrisk}}$$

$$\Updownarrow cRa \wedge aRb \quad (\text{vores antagelse})$$

$$\Downarrow cRb, \text{ da } R \text{ } \underline{\text{transitiv}}$$

$$\Updownarrow c \in [b], \text{ da } R \text{ er symmetrisk}$$



D.v.s. alt, hvad der er i $[a]$, er også i $[b]$.

$$\underline{[b] \subseteq [a]} :$$

$$\uparrow d \in [b]$$

$$\uparrow bRd$$

$$\Downarrow bRd \wedge aRb \quad (\text{vores antagelse})$$

$$\Downarrow aRd, \text{ da } R \text{ er } \underline{\text{transitiv}}$$

$$\Updownarrow c \in [a]$$

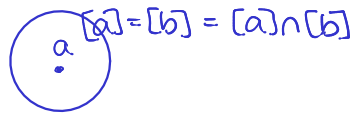


D.v.s. alt, hvad der er i $[b]$, er også i $[a]$.

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset :} \quad ((ii) \Rightarrow (iii))$$

Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er refleksiv



$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb :} \quad ((iii) \Rightarrow (i))$$

$$\Leftrightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists c : aRc \wedge cRb$$

$$\Leftrightarrow aRb, \text{ da } R \text{ er transitiv}$$

