

Sidste gang: Relationer (fortsat)

Relationer kan sammensættes som funktioner:

$$S \circ R, R \circ S$$

$$R \circ R = R^2$$

og som mængder:

$$S \cup R, S \cap R, S - R, S \oplus R$$

Transitiv lukning af R : $\bigcup_{i=1}^{|A|} R^i$

Ækvivalensrelation: Refleksiv, symmetrisk, transitiv

Eks:

$$\checkmark: =, \equiv \pmod{m}$$

$$\times: \leq, |, \neq$$

R rel. på A , $a \in A$

$[a]_R = \{b \mid (a,b) \in R\}$ kaldes a 's ækvivalensklasse

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$

$$[0]_R = \{0, 3, 6, \dots\} = [3]_R = [6]_R = \dots$$

$$[1]_R = \{1, 4, 7, \dots\} = [4]_R = \dots$$

$$[2]_R = \{2, 5, 8, \dots\} = [5]_R = \dots$$

Sætning 9.5.1: R æko. rel.

$$\Updownarrow aRb$$

$$\Updownarrow [a] = [b]$$

$$\Updownarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

Sætning 9.5.1 kan bruges til at vise:

Sætning 9.5.2:

Lad A være en mængde. Da gælder

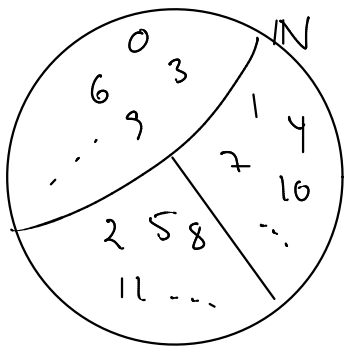
(1) R er en ækv.rel på $A \Rightarrow$

R 's ækv.klasser udgør en partitionering (disjunkt opdeling) af A .

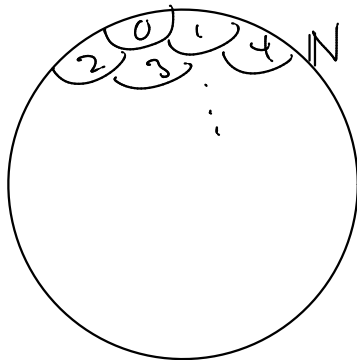
Det omvendte gælder også:

(2) For enhver partitionering af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i partitioneringen.

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$



$S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$



Beris for Sætning 9.5.2:

(1): Åkv.rel. $\Rightarrow$ partitionering:

Åkv.klasserne dækker hele A , dvs $\bigcup_{a \in A} [a] = A$:

$a \in [a]$ for alle $a \in A$, da R er refleksiv

D.v.s. ethvert element i A er indeholdt i en åkv.klasse.

Åkv.klasserne er disjunkte, dvs. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Kontraposition:

$[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

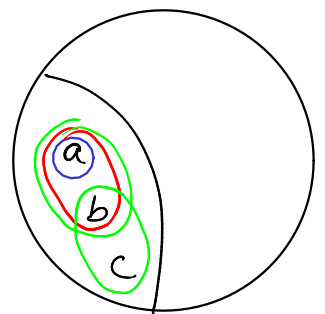
Gælder iflg. Sætning 9.5.1.

(2): Partitionering $\Rightarrow$ åkv.rel.:

Lad R være relationen defineret ved, at aRb , hvis og kun hvis a og b tilhører samme mængde i partitioneringen.

Vi skal vise, at R er en åkv.rel.

Refleksiv: for alle $a \in A$ gælder:
 a tilhører samme mængde som a .



Symmetrisk: for alle $a, b \in A$ gælder:
Hvis a tilhører samme mængde som b ,
så tilhører b samme mængde som a .

Transitiv: for alle $a, b, c \in A$ gælder:
Hvis a tilhører samme mængde som b ,
og b tilhører samme mængde som c ,
så tilhører a samme mængde som c .

Partielle ordninger (afsnit 9.6)

Def. 9.6.1:

En relation R på en mængde A , som er

- refleksiv,
- **anti**-symmetrisk og
- transitiv

kaldes en **partiel ordning**.

(A, R) kaldes en **partielt ordnet mængde** (poset)

Eks:

$\vee : \leq, =, |, \subseteq$

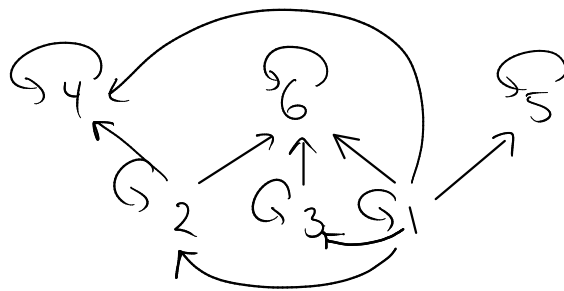
$\wedge : <, \neq, \equiv, \subset$

refl. anti-sym. trans. refl.

Eks:

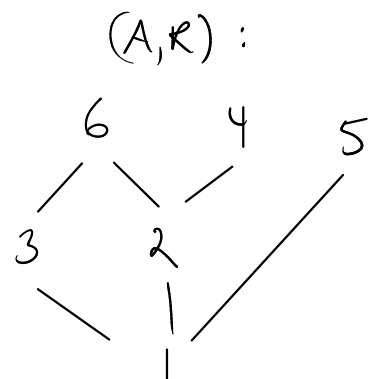
$A = \{1, 2, \dots, 6\}$, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \mid b\}$

(A, R) :



Hasse-diagram:

- Udelad alle kanter, som kan udledes af egenskaberne refleksiv og transitiv.
- Tegn a under b , hvis aRb .



Def. 9.6.2 :

Lad $\leq$ være en partiel ordning

Hvis $a \leq b$ eller $b \leq a$, kaldes a og b sammenlignelige.

Def. 9.6.3 :

Lad $(A, \leq)$ være en partielt ordnet mængde.

Hvis alle $a, b \in A$ er sammenlignelige,

kaldes $\leq$ en total ordning

Eks:

$\sqrt{} : \leq$

$\% : =, |, \subseteq, <$

6
|
5
|
4
|
3
|
2
|
1

Leksikografisk ordning $\leq$

$\leq_1, \leq_2$: partielle ordninger

$a <_1 b$ betyder $a \leq_1 b \wedge a \neq b$

Tilsvarende for $\leq_2$.

$(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$, hvis

$a_1 <_1 b_1$

eller

$a_1 = b_1$ og $a_2 \leq_2 b_2$

Eks: Ordbog

Her er $\leq_1, \leq_2, \leq_3, \dots$ alfabetrækkefølge

Eksamen

- Start med at tage et ørblik over sættet.
Brug tiden rigtigt.
- Begrund dine svar
Skriv præcis så meget, at man kan følge din
tankegang.
- Det er god træning at løse gamle eks.opgaver.

Spørgetime i januar?

Udfyld doodle, hvis du gerne vil komme.