

Sidste gang:

Konvergens:

p-række: $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \begin{cases} \text{konvergerer, hvis } p > 1 \\ = \infty, \text{ hvis } p \leq 1 \end{cases}$

Kvotient-kriteriet (Sætning 11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer mod uendelig}$$

↑ følger gss'et af Sætning 4

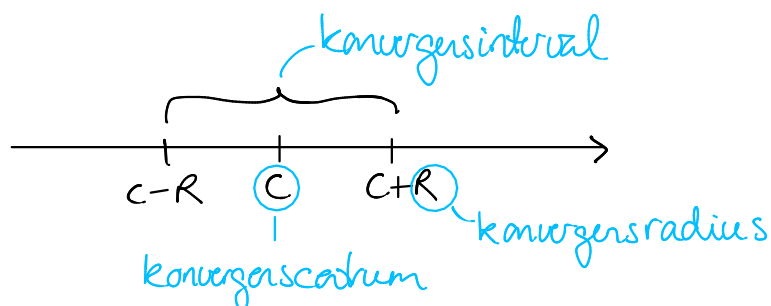
Rootkriteriet (Sætning 12):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer mod } \infty$$

Potensrækker:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ kaldes en potensrække omkring } c$$



$$R=0, R \in \mathbb{R}^+ \text{ eller } R=\infty$$

Hvis $R \in \mathbb{R}^+$, konvergerer rækken ikke nødvendigvis i

$x = c-R$ og $x = c+R$.

Hvordan bestemmes R ?

Ifølge Kvotientkriteriet konvergerer rækken, hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right| = |x-c| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Lad $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Da konvergerer rækken altså, hvis $|x-c| \cdot L < 1$

D.v.s. hvis $|x-c| < \frac{1}{L}$.

D.v.s. $R = \frac{1}{L}$.

Eks:

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergerer, når $-1 < x < 1$. D.v.s. $R=1$.

$a_n=1$, $c=0$.

$\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$ konvergerer, når $2 < x < 4$.

$a_n=1$, $c=3$.

$\sum_{n=0}^{\infty} 2(x+3)^n$ konvergerer, når $-4 < x < -2$

$a_n=2$, $c=-3$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer for ethvert $x \in \mathbb{R}$. D.v.s. $R=\infty$.

$a_n = \frac{1}{n!}$, $c=0$.

Hvis en potensrække har en positiv konvergensradius, kan den differentieres led for led:

Sætning 19:

Hvis $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, for $-R < x < R$,
da er $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$, for $-R < x < R$

Taylor- og Maclaurin-rækker (afsnit 9.6)

Sætning 21:

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$, for $c-R < x < c+R$, hvor $R > 0$,

da er $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$, for $n \in \mathbb{N}$

D.v.s. da er $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{6}(x-c)^3 + \dots$

Bevis:

Hvis $f(x) = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$, for $c-R < x < c+R$,
følger det af Sætning 19 (med x erstattet af $x-c$), at

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-c) + 3 \cdot 4a_4(x-c)^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-c) + \dots$$

$\vdots$

D.v.s.

$$f(c) = a_0 = 0! a_0$$

$$f'(c) = a_1 = 1! a_1$$

$$f''(c) = 2a_2 = 2! a_2$$

$$f'''(c) = 2 \cdot 3a_3 = 3! a_3$$

$\vdots$

□

D.v.s. hvis der findes en potensrække, som repræsenterer $f(x)$ i et åbent interval, da er den entydigt bestemt (der kan ikke være to forskellige potens-rækker, som repræsenterer den samme funktion).

Def. 9.6.8 :

Hvis $f^{(k)}(x)$ eksisterer for alle $k \in \mathbb{N}$, da kaldes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

Taylor-rækken for f omkring c .

Hvis $c=0$, kaldes rækken også en Maclaurin-række.

NB:

Taylor-rækken for f omkring c er lig med $f(x)$ for $x=c$.
For andre x -værdier konvergerer den ikke nødvendigvis.

Og hvis den konvergerer for andre x -værdier, konvergerer den ikke nødvendigvis mod $f(x)$.

Def. 9.6.9:

Hvis Taylor-rækken for f omkring c konvergerer

mod f i et åbent interval omkring c ,

da er f analytisk i c .

Hvis rækken konvergerer mod f i ethvert punkt i et åbent interval I , da er f analytisk i I .

Eks 9.6.1: e^x

$$(e^x)' = e^x, \text{ og } e^0 = 1$$

D.v.s. Maclaurin-rækken for e^x er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

Ifølge Eks 9.5.2(a) konvergerer rækken.

Men konvergerer den mod e^x ? Ja:

$$\text{Lad } P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k.$$

$P_n(x)$ kaldes Taylor-polynomiet af grad n omkring c .

„Tommelfingerregel“:

Hvis vi bruger $P_n(x)$ til at approksimere $f(x)$,
er fejlen, vi begår, af samme størrelses-orden som
det næste led i Taylor-rækken

Sætning 22: (Taylors Sætning)

Antag, at $f^{(n+1)}(x)$ eksisterer.

Da eksisterer der et ξ mellem x og c , sådan at

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \text{ hvor}$$

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-c)^{n+1}$$

Eks 9.6.7:

For e^x er fejlen

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{for et } s \text{ mellem } 0 \text{ og } x$$
$$\leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{da } e^s \text{ vokser med } s.$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= e^{|x|} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{ifølge regnereglerne s. 499} \\ &= e^{|x|} \cdot 0, \quad \text{ifølge Sætning 3(b)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{D.v.s. } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for ethvert } x \in \mathbb{R}.$$