

Sidste gang:

- $\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow$

- Sandhedstabeller

for operatorerne og for sammensatte udtryk
f.eks.:

- $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ (Tabel 1.3.7, 2. linje)

Tabel 7 er nyttig!

Læs alle ækvivalenser, og check, at du
forstår dem.

- $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (Tabel 1.3.7, 1. linje)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	
S	S	S	S	} (1)
S	F	F	F	
F	S	S	S	} (2)
F	F	S	S	

Kan også argumentere for flere rækker ad gangen:

For begge udtryk gælder:

(1): Hvis p er sand, skal q også være det

(2): Hvis p er falsk, er udtrykket sandt

Tabel 1.3.6 (s. 25) er også vigtig

Nogle simple, nogle lidt mere komplicerede:

Distributive Love: (lidt som at gøre ind i parentes)

$$(1) \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Sandhedstabellen har 8 rækker

For begge udtryk gælder:

- Hvis p er sand, er udtrykket sandt.
- Hvis p er falsk, skal både q og r være sande.

$$(2) \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Bevis to af to

For begge udtryk gælder

- p skal være sand
- mindst en af q og r skal være sand, men de behøver ikke begge være sande

De Morgans Love:

$$(1) \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$(2) \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Bevis: opgave til næste uge

Bevis: Tabel 3, s. 24

Eks:

$$\begin{aligned} & \neg(3.5 \geq 4.4 \vee 2.6 > 4.4) \\ \Leftrightarrow & \neg(3.5 \geq 4.4) \wedge \neg(2.6 > 4.4) \\ \Leftrightarrow & 3.5 < 4.4 \wedge 2.6 \leq 4.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(5 < 7 \wedge 2^4 = 2 \cdot 4) \\ \Leftrightarrow & 5 \geq 7 \vee 2^4 \neq 2 \cdot 4 \end{aligned}$$

Efterhånden, som vi har flere og flere ækvivalenser at gøre gældt med, er sandhedstabeller ikke nødvendige. den mest effektive måde at bevise nye ækvivalenser:

Eks 1.3.6: (s. 27-28)

Tabel 1.3.7, linje 5: $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Bevis:

$$\begin{aligned} \neg(p \Rightarrow q) &\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q), && \text{ifølge Tabel 1.3.7, linje 1} \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q, && \text{ifølge De Morgan (2)} \\ &\Leftrightarrow p \wedge \neg q, && \text{ifølge Dobbelt-negations-loven} \end{aligned}$$

Tabel 1.3.6

Virker det rimeligt?

Ja: $p \Rightarrow q$ er falsk, netop når p er sand, og q er falsk.
 $p \wedge \neg q$ er sand, netop når $\underline{\hspace{10em}}$

Check også Tabel 1.3.8 !

Lidt mere terminologi: (Def. 1.3.1, s. 23)

Tautologi: Sammensat udsagn, som er **sandt**,
uanset sandhedsværdier af de udsagn,
som indgår.

Eks: $p \vee \neg p$
 $p \Leftrightarrow p$
 $p \Rightarrow p$
 $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (og alle de andre
øku. i afsnit 1.3)

Modstrid: Sammensat udsagn, som er **falsk**,
(contradiction) uanset s.v. af de udsagn, der indgår.

Eks: $p \wedge \neg p$
 $p \Leftrightarrow \neg p$
 $p \oplus p$

Kontingens: Sammensat udsagn, som hverken er en tautologi
eller en modstrid.

Eks: $p \vee q$
 $p \Rightarrow q$
 $p \Rightarrow \neg p$

Heltal :

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

Positive heltal:

$$\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, \dots \}$$

Naturlige tal:

$$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \dots \}$$

NB: Nozke definerer $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

Kvantorer (afsnit 1.4)

(Quantifiers)

Er $\underbrace{x < 2x}_{P(x)}$?

$P(x)$ er et åbent udsagn.

D.v.s. sandhedsværdien afhænger af en eller flere frie variable.

x er en fri variabel

" $< 2x$ " er et prædikat

$P(1)$ er udsagnet $1 < 2$ S

$P(0)$ er udsagnet $0 < 0$ F

$P(-1)$ er udsagnet $-1 < -2$ F

$P(x)$ er sand, hvis $x > 0$.

D.v.s.

$P(x)$ er sand, hvis $x \in \mathbb{Z}^+$ ↖ mængden af positive heltal

D.v.s.

$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \dots$

Kan også skrives:

$\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x < 2x$ S ↖ universet/domænet (kan udelades, hvis det er underforstået)

↖ "For alle" ↖ "gælder" ↖ (udelades nogle gange)

udsagn (d.v.s. har en sandhedsværdi)

x er en bindet variabel

Udvid universet:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x < 2x \quad F \quad (\text{Eks: } x = -1)$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 2|x| \quad S$$

Universet kan også indskrænkes:

indskrænket universet

$$\uparrow \uparrow \forall x \in \mathbb{Z}, x \geq 3 : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\uparrow \uparrow \forall x \in \{3, 4, 5, \dots\} : x+3 \leq 2x$$

$$\uparrow \uparrow \forall x \in \mathbb{Z} : (x \geq 3 \Rightarrow x+3 \leq 2x)$$

$$Q(x) : x+3 \leq 2x$$

$\neg(\forall x \in \mathbb{Z}^+ : x+3 \leq 2x)$, men der findes mindst et $x \in \mathbb{Z}^+$,
som opfylder $Q(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{"der eksisterer"} & & \text{"sådan at"} \\ \downarrow & & \swarrow \\ \exists x \in \mathbb{Z}^+ : & x+3 \leq 2x & S \end{array}$$

D.v.s.

$$Q(1) \vee Q(2) \vee Q(3) \vee \dots$$

P.v.s.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad S \quad (\text{universet er uendeligt})$$

Man kan også indskrænke universet, ligesom for $\forall$:

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 : x+3 \leq 2x \quad F \quad (x \leq 1 \Rightarrow x+3 > 2x)$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq 10 : x+3 \leq 2x \quad S$$

$$\exists x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S \quad (x=0)$$

Dette udsagn kan præciseres:

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x + x \quad S$$

↖ "Der eksisterer præcis ét"

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x = x \cdot x \quad F \quad (x=0, x=1)$$

$$\exists! x \in \mathbb{Z} : x+3 \leq 2x \quad F \quad (x=3, x=4, \dots)$$

$\exists$ og $\forall$ er kvantorer

Kvantorer har højere præcedens end de logiske operatoren

$$\neg \wedge \vee \Rightarrow \Leftrightarrow \oplus$$

Eks:

$$\forall x \in \mathbb{Z} : x \leq 3 \vee 5 \geq 4 \quad \begin{array}{l} \swarrow (\forall x \in \mathbb{N} : x \leq 3) \vee 5 \geq 4 \\ \searrow \forall x \in \mathbb{N} : (x \leq 3 \vee 5 \geq 4) \end{array}$$

Negering af kvantificerede udsagn:

Har du det modsatte af $\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} & \neg(\forall x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x) && S \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{N} : \neg(x+3 \leq 2x) && S \\ \Leftrightarrow & \exists x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x && S \end{aligned}$$

Har du det modsatte af $\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x$?

$$\begin{aligned} & \neg(\exists x \in \mathbb{N} : x+3 \leq 2x) && F \\ \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{N} : x+3 > 2x && F \end{aligned}$$