

Sidste gang:

Bevismetoder

- Direkte bevis

$$(p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow q) \Rightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$$

Eks: n lige n^2 lige

- Kontrapositionsbevis

$$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow \boxed{p \Rightarrow q}$$

Eks: n^2 lige n lige

- Modstridsbevis

$$(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow \boxed{p}$$

Eks: ≥ 2 med fødselsdag i samme uge

„Tricks“: Split op i delresultater

Se først på simple specieltilfælde

...

- Induktionsbeviser

Eks: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$, for $n \in \mathbb{N}$

$P(n)$

Bevis: Ved induktion over n .

Basis: $n=0$

$$\sum_{i=0}^0 2^i = 2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad P(0)$$

Induktionsantagelse:

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^i = 2^{(n-1)+1} - 1 = 2^n - 1 \quad P(n-1)$$

Induktionsskridt:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} &= 2^n - 1, \text{ ifølge ind. ant. } P(n-1) \\ \Downarrow \\ 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \quad P(n) \end{aligned}$$

Basis skridt: Bevis $P(0)$

Ind. skridt: Bevis, at $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, for $n \geq 1$

D.v.s. bevis, at $P(0) \Rightarrow P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow \dots$

Bestemt som løkke-invariant:

$$i = 0$$

$$\text{sum} = 2^0$$

While ~~II~~ $i < n$

$$i = i + 1$$

$$\text{sum} = \text{sum} + 2^i$$

$$\text{II: } \text{sum} = 2^{i+1} - 1$$

Første gang ($i=0$): $\text{sum} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$

Anden gang ($i=1$): $\text{sum} = 2^1 - 1 + 2^1 = 2^2 - 1$

Tredje gang ($i=2$): $\text{sum} = 2^2 - 1 + 2^2 = 2^3 - 1$

$\vdots$

($i=n$) $\text{sum} = 2^n - 1 + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Induktionsbeviser:

Bevis $P(n)$, $n \geq k$ o.h.a. (Simpel) induktion:

- Bevis $P(k)$ (Basistilfælde)
- Bevis $\underbrace{P(n-1) \Rightarrow P(n)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \geq k+1$ (Induktionsstridt)

(eller bevis $\underbrace{P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{Induktionsantagelse}}, n \geq k$)

D.v.s. bevis

- $P(k)$
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
- $P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$
- $P(k+2) \Rightarrow P(k+3)$
- $\vdots$

Eks: $2^n < n!$ for $n \geq 4$

$$n=4: \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{16} < \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{24}$$

$$n=5: \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{32} < \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{120}$$

$$n=6: 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 < 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$\vdots$

Vi ganger hele tiden med 2 på v.s.
og med større og større tal på h.s.

Bevis: Ved induktion over n

Basis: $n=4$

$$2^4 = 16$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse:

$$2^{n-1} < (n-1)!$$

Ind. skridt: $n \geq 5$

$$\Downarrow 2^{n-1} < (n-1)!, \text{ iflg. ind. ant.}$$

$$\Downarrow 2 \cdot 2^{n-1} < 2 \cdot (n-1)!$$

$$< n \cdot (n-1)!, \quad \text{da } n \geq 5$$

$$\Downarrow 2^n < n!$$

□

Vi viste

- $P(4)$
- $P(4) \Rightarrow P(5) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(7) \Rightarrow \dots$

Ligesom at vælte domino-brikker:

- I basis-tilfældet viser vi, at den første brik kan væltes.
- I ind. skridtet viser vi, at afstanden m.l. brikkerne er så lille, at vælter en brik, vælter den næste også.

Prøve selv at bevise, at

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ for } n \geq 1$$

$$\text{O.v.s. } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsantagelse: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsskridt: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$$\Downarrow$$
$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

□

Äkvivalent bevis:

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse: $n \geq 1$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ind. skridt: $n \geq 1$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

P.v.s. det gør ikke nogen forskel, om vi beviser

$$P(n-1) \Rightarrow P(n), \text{ for } n \geq 2$$

eller

$$P(n) \Rightarrow P(n+1), \text{ for } n \geq 1$$

eller, for den sags skyld,

$$P(n+10) \Rightarrow P(n+11), \text{ for } n \geq -9$$

Påstand: Alle æbler har samme farve

Bevis: Induktion over $n = \# \text{æbler}$

Basis: $n=1$

1 æble: samme farve som sig selv ✓

Ind. ant.: $n \geq 2$

I enhver skål med $n-1$ æbler har alle æblerne samme farve.

Ind. skridt: $n \geq 3$

Stil æblerne op på række:



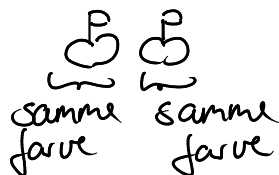
De første $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

De sidste $n-1$ æbler har samme farve (ind. ant.)

D.v.s. det første æble har samme farve som de $n-2$ midtste, som igen har samme farve som det sidste.

Altså har alle n æbler samme farve. $\square$

Bemærk: Argumentet i indskridtet fungerer ikke for $n=2$:



D.v.s. vi har vist:

$$P(1)$$

$$P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$$

Men ikke

$$P(1) \Rightarrow P(2)$$

Da $P(2)$ (selvfølgelig) er falsk, har vi ikke meget glæde af at vide, at $P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \Rightarrow \dots$

Afsnit 2.1-2.2:

Mængder

Eks: $\mathbb{L} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ uendelig opremsning
 $= \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x\}$ mængde-bygger - notation

$\uparrow$ "hværom
du gælder"
 $\uparrow$ "går op i"
(Kap. 4)

$$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} : x = 2k\}$$
$$= \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

Mængde-bygger - notation: $\{\langle \text{element} \rangle [\in \langle \text{univers} \rangle] \mid \langle \text{udsagn} \rangle\}$

$$\{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16\} = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 4\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\} \quad (\text{rationale tal})$$
$$= \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$|S|$: kardinalitet af S ("størrelsen" af S)
elementer i S , hvis S er endelig
Det + Mat vender tilbage til kardinalitet af
uendelige mængder

Eks: $|\{1, 2\}| = 2 = |\{1, 2, 2\}|$
 $|\{1, 2, 4, 8, 16\}| = 5$