

Sidste gang:

Induktion:

| beviset selv: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$, for alle $n \geq 1$.

Eks:

$$P(10): 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Basis 1: Ved induktion over n

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Induktionsantagelse: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Induktionsskridt: $n \geq 2$

$$1+2+\dots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$\Downarrow$

$$1+2+\dots+n-1+n = \frac{(n-1)n}{2} + n$$

$$= \frac{(n-1)n + 2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n}{2}$$

□

Bemærk:

- $P(1)$
- $P(n-1) \Rightarrow P(n)$, for $n \geq 2$

Basis 2:

Basis: $n=1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Ind. antagelse: $n \geq 1$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ind. skridt: $n \geq 1$

$$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ind. ant.})$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 1+2+\dots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

□

Basiser:

- $P(1)$
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, for $n \geq 1$

Mængder

Mængde-bygger - notation

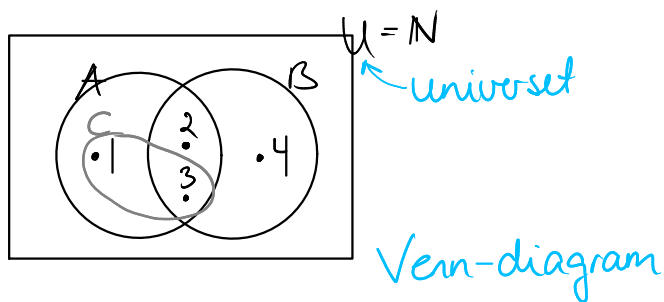
$$\text{Eks: } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

Kardinalitet

$$\text{Eks: } |\{1, 2, 4, 8, 16\}| = 5$$

Mængder (afsnit 2.1-2.2) - fortsat

Eks:



$A \cap B = \{2, 3\}$ fællesmængde / snitmængde (intersection)
„fælles med“

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ foreningsmængde (union)
„forent med“

Bemærk:

$$\mathbb{N} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}, \text{ men}$$

$$\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\} \neq \mathbb{R}, \quad |\{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}| = 2$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

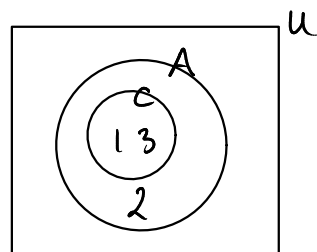
$$C \subseteq A$$

Delmængde (subset)

$$C \subseteq A \iff \forall x \in U: (x \in C \Rightarrow x \in A)$$

$$\iff \forall x \in C: x \in A$$

„er en delmængde af“
„er indeholdt i“



$\emptyset = \{\}$ Den tomme mængde

Bemærk:

- $C \subseteq C$, fordi
 $\forall x \in C: x \in C$
- $\emptyset \subseteq C$, fordi
 $\forall x \in \emptyset: x \in C$ eller
 $\forall x \in U: \underbrace{(x \in \emptyset \Rightarrow x \in C)}_F$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_S$

Agte delmængde (proper subset)
 $C \subset A \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \neq A$

Eks:

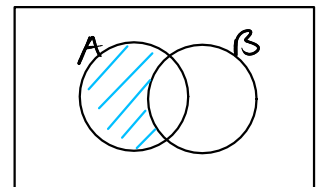
$$\emptyset \subset C$$

$$C \subset A$$

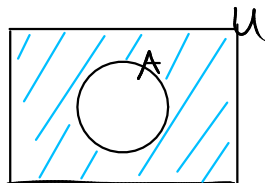
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$

$$A \setminus B = A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

↑
"fraregnet"



Komplement af A:
 $\bar{A} = U - A$



A og B er *disjunkte* (disjoint)
 $\Updownarrow$
 $A \cap B = \emptyset$
 $\Updownarrow$
 $A - B = A$
 $\Updownarrow$
 $A \subseteq \bar{B}$

"Mængde-love":

Tabel 2.2.1 (s. 132)

$\cup$

$\cap$

$\sim$

$\sim$

$\sim$

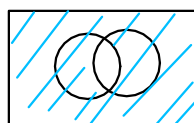
Tabel 1.3.6 (s. 25)

$\vee$

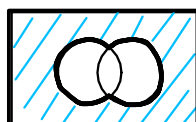
$\wedge$

De Morgans Love:

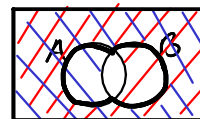
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$\square$: $\overline{A \cup B}$



$\square$: $\bar{A}$ $\square$: $\bar{B}$

$\square$: $\bar{A} \cap \bar{B}$

Bogen viser love fra Tabel 2.2.1 u.h.a. omskrivninger
 af def. af de enkelte mængde-operationer og u.h.a.
 tilhørs-tabeller (membership tables), men det er som
 regel nemmest at bruge Venn-diagrammer (som ovenfor).

Potensmenge (power set)

$$\mathcal{P}(S) = \{ A \mid A \subseteq S \}$$

Ex:

$$S = \emptyset$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 1 = 2^0$$

$$S = \{1\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 2 = 2^1$$

$$S = \{1, 2\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 4 = 2^2$$

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

$$|\mathcal{P}(S)| = 8 = 2^3$$

$$S' = \{1, 2\}$$

$$S = \{1, 2, 3\}, \text{ d.h. } x=3$$

Påstand: En mængde S med n elementer
har 2^n delmængder ($|S| = n \Rightarrow |P(S)| = 2^n$)

Basis: Ved induktion over n

Basis: $n=0$

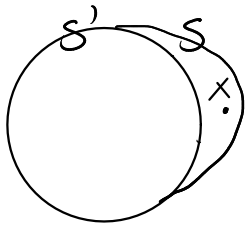
$\emptyset$ har 1 delmængde, nemlig $\emptyset$.

Ind. ant.:

En mængde med $n-1$ elementer har 2^{n-1} delmængder

Ind. skridt: $n \geq 1$

Enhver mængde med n elementer kan dannes
ved at tage en mængde med $n-1$ elementer
og tilføje et element.

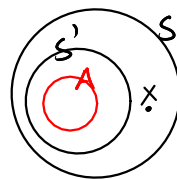


$$|S'| = n-1, \quad S = S' \cup \{x\}$$

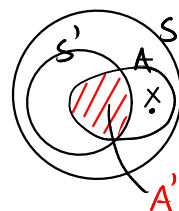
S' har 2^{n-1} delmængder ifølge ind. ant.

For enhver delmængde $A \subseteq S$ er der to muligheder:

- $x \notin A$, dvs. $A \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



- $x \in A$, dvs. $A = \{x\} \cup A'$, hvor $A' \subseteq S'$
(2^{n-1} muligheder)



I alt $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ muligheder

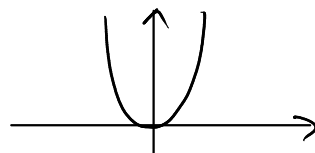
□

Funktioner (afsnit 2.3)

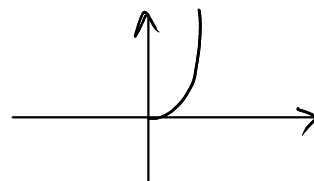
Def. 1+2:

$f: A \rightarrow B$
definitions mængde (domain) $D_m(f)$ ←
sekundær mængde (codomain) ←

Eks: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$

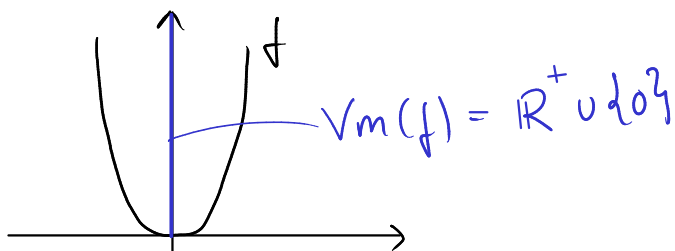


Eks: $g: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 $g(x) = x^2$



Værdimængde / billed mængde (range):

$$\begin{aligned} f: A \rightarrow B \\ V_m(f) &= f(A) \\ &= \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \end{aligned}$$



f er ikke **injektiv** (en-til-en).

Eks: $f(-1) = f(1)$

f er ikke **surjektiv** (på),

da $\forall m(f) \neq \mathbb{R}$

← f 's skudområde

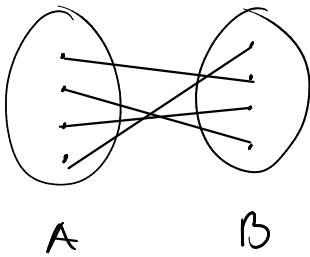
g er både injektiv og surjektiv.

D.v.s. g er **bijektiv**.

Def. 8:

Bijektiv: injektiv og surjektiv

Bijektion/en-til-en-korrespondance: funktion, som er bijektiv



$$f: A \rightarrow B$$

$$\forall y \in B: \exists ! x \in A: f(x) = y.$$

D.v.s. g er bijektiv, men f er ikke.

Hvis f er bijektiv, er den også **invertibel**.

D.v.s. den har en invers: