

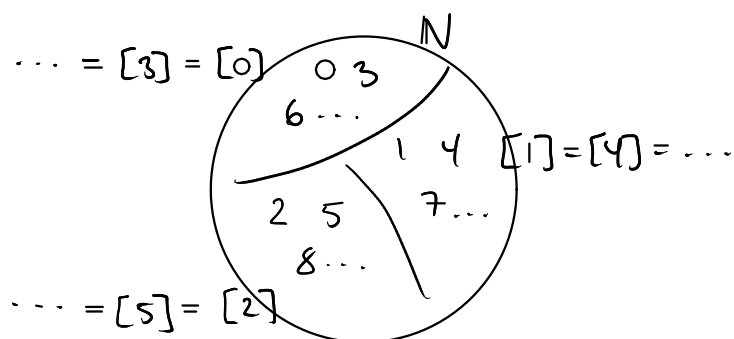
Sidste gang:

Ækvivalensrelationer: refleksiv, symmetrisk, transitiv

Ækvivalensklasser:

$$[a]_R = \{ b \mid (a, b) \in R \} = \{ b \mid (b, a) \in R \}$$

$$\text{Eks: } R = \{ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \equiv b \pmod{3} \}$$



Ikke tilfældigt, at ækv.klasserne partitionerer $\mathbb{N}$:

Sætning 9.5.1:

Lad R være en ækv.rel. på en mængde A ,
og lad $a, b \in A$. Da gælder:

$$\updownarrow \quad a R b \quad (i)$$

$$\updownarrow \quad [a] = [b] \quad (ii)$$

$$\updownarrow \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset \quad (iii)$$

Basis:

Vil beise, at $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

$aRb \Rightarrow [a] = [b]$: $((i) \Rightarrow (ii))$

Direkte basis:

$aRb \Rightarrow bRa$, da R er *sym.*

$[a] \subseteq [b]$:

$$c \in [a] \Rightarrow aRc \Rightarrow bRc \Rightarrow c \in [b]$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
def. bRa , *trans.* *def.*

$[b] \subseteq [a]$:

$$d \in [b] \Rightarrow bRd \Rightarrow aRd \Rightarrow d \in [a]$$

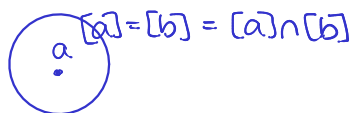
$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
def. aRb , *trans.* *def.*

D.v.s. $[a] = [b]$

$$\underline{[a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset :} \quad ((ii) \Rightarrow (iii))$$

Skal blot vise $[a] \neq \emptyset$:

$a \in [a]$, da R er **refleksiv**



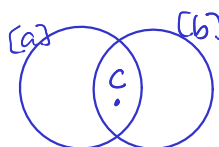
$$\underline{[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow aRb :} \quad ((iii) \Rightarrow (i))$$

$$\Updownarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$\Updownarrow \exists c : aRc \wedge bRc$$

$$\Updownarrow \exists c : aRc \wedge cRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{symmetrisk}$$

$$\Updownarrow aRb, \text{ da } R \text{ er } \textbf{transitiv}$$



Sætning 9.5.1 kan bruges til at vise:

Sætning 9.5.2:

Lad A være en mængde. Da gælder

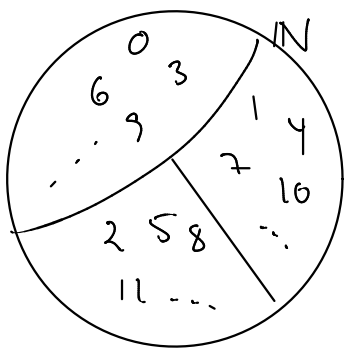
(1) R er en ækv.rel på $A \Rightarrow$

R 's ækv.klasser udgør en partitionering (disjunkt opdeling) af A .

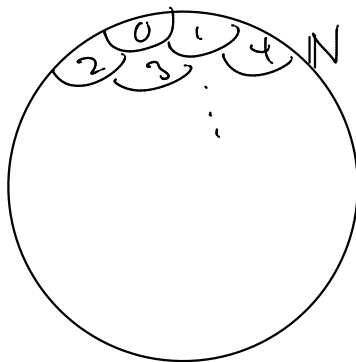
Det omvendte gælder også:

(2) For enhver partitionering af A findes der en ækv.rel., hvis ækv.klasser netop er mængderne i partitioneringen.

Eks: $R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{3}\}$ på $\mathbb{N}$



$S = \{(a,b) \mid a=b\}$ på $\mathbb{N}$



Beris for Sætning 9.5.2:

(1): Äkv.rel. $\Rightarrow$ partitionering:

dvs. hvert element er indeholdt i præcis én mængde.

Äkv.klasserne dækker hele A , dvs $\bigcup_{a \in A} [a] = A$:

$a \in [a]$ for alle $a \in A$, da R er refleksiv

Dvs. ethvert element i A er indeholdt i en äkv.klasse.

Äkv.klasserne er disjunkte, dvs. $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$

Kontraposition: $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

$\uparrow$
Sætning 9.5.1.

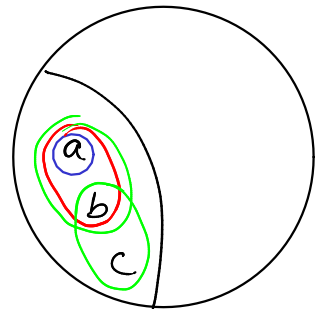
(2): Partitionering $\Rightarrow$ äkv.rel.:

Lad R være relationen defineret ved, at aRb , hvis og kun hvis a og b tilhører samme mængde i partitioneringen.

Vi skal vise, at R er en äkv.rel.

Refleksiv: for alle $a \in A$ gælder:

a tilhører samme mængde som a .



Symmetrisk: for alle $a, b \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

så tilhører b samme mængde som a .

Transitiv: for alle $a, b, c \in A$ gælder:

Hvis a tilhører samme mængde som b ,

og b tilhører samme mængde som c ,

så tilhører a samme mængde som c .

Partielle ordninger (afsnit 9.6)

Def. 9.6.1:

En relation R på en mængde A , som er

- refleksiv,
- **anti**-symmetrisk og
- transitiv

kaldes en **partiel ordning**.

(A, R) kaldes en **partielt ordnet mængde** (poset)

Eks:

$\vee : \leq, =, |, \subseteq$

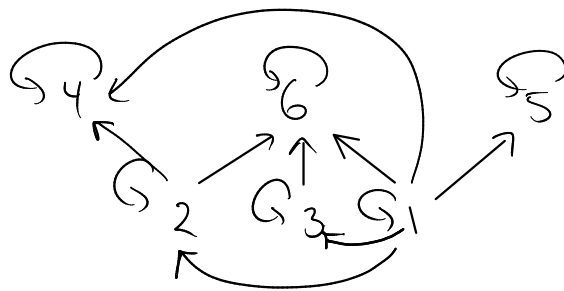
$\wedge : <, \neq, \equiv, \subset$

refl. anti-sym. trans. refl.

Eks:

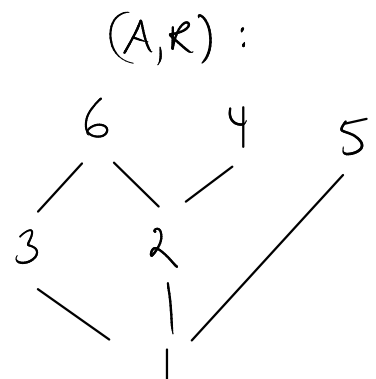
$A = \{1, 2, \dots, 6\}$, $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \mid b\}$

(A, R) :



Hasse-diagram:

- Udelad alle kanter, som kan udledes af egenskaberne refleksiv og transitiv.
- Tegn a under b , hvis aRb .



Def. 9.6.2 :

Lad $\leq$ være en partiel ordning

Hvis $a \leq b$ eller $b \leq a$, kaldes a og b sammenlignelige.

Def. 9.6.3 :

Lad $(A, \leq)$ være en partielt ordnet mængde.

Hvis alle $a, b \in A$ er sammenlignelige,

kaldes $\leq$ en total ordning

Eks:

$\sqrt{\cdot} : \leq$

$\% : =, |, \subseteq, <$

6
|
5
|
4
|
3
|
2
|
1