

Sidste gang:

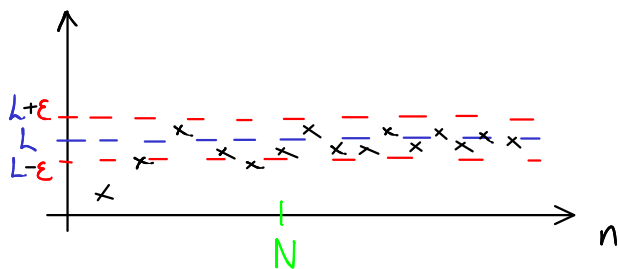
Afsnit 9.1: Følger (sequences)

Konvergens/divergens

Def. 2:

$\{a_n\}$ konverger mod L , hvis

$$\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - L| < \varepsilon$$



Regneregler:

Hvis $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ konverger, gælder:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\frac{\quad}{\quad} \cdot \frac{\quad}{\quad}$$

, hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\begin{array}{l} \text{„ultimately“} \\ \Downarrow \quad \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n \leq b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Downarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists N \in \mathbb{Z} : \forall n \geq N : a_n \leq b_n \leq c_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \end{array} \right. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \end{array}$$

Soeding 3:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, hvis $|x| < 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$

Afsnit 9.2: Rækker (series)

Def 3: Betragt rækken $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ kaldes rækkens n 'te partielle sum.

Hvis s_n konvergerer, er $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

Eks: Geometriske rækker

$$\sum_{i=0}^n r^i = \sum_{i=1}^{n+1} r^{i-1} = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

D.v.s.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & \text{hvis } |r| < 1 \\ \infty, & \text{hvis } r \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \text{ diverger, hvis } r \leq -1.$$

Eks: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n = \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n \text{ diverger:}$$

$s_0 = 1, s_1 = -3, s_2 = 6, s_3 = -21, \dots$
og udsvingene bliver større og større.

1 dag:

Regneregler

Konvergenzkriterier

Men først skal vi estimere H_n :

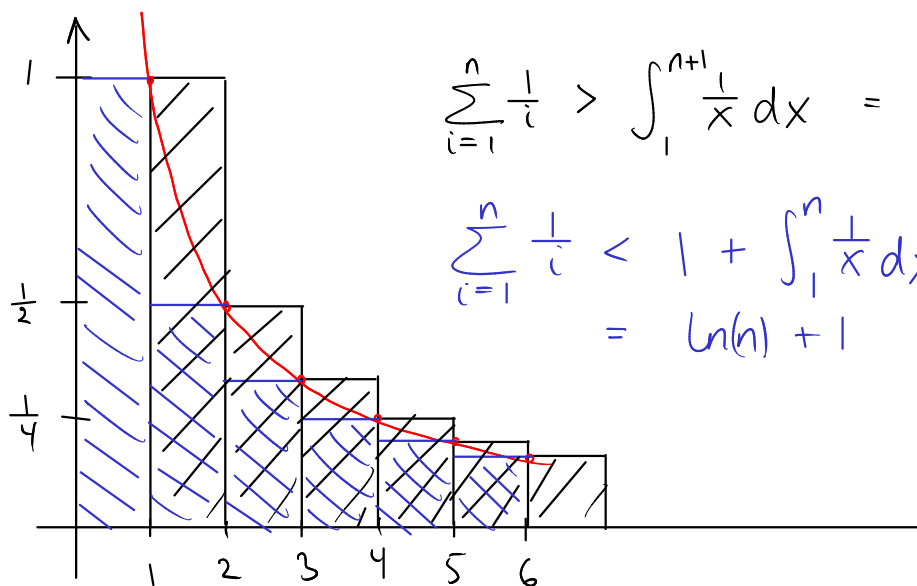
Eks 4:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Harmonisk række

$$H_n = S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \quad n\text{'te harmoniske tal}$$

H_n optræder i mange sammenhænge, f.eks. i Coupon Collector's Problem, som vi så tidligere.



$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} < 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + [\ln(x)]_1^n = \ln(n) + 1$$

D.v.s.

$$\ln(n) < H_n < \ln(n) + 1$$

$\Rightarrow$ vi skal i gennemsnit købe $\approx n \ln n$ pakker.

D.v.s. H_n divergerer mod ∞ .

Bemærk, at Def. 3 betyder at grænseværdier for en uendelig række beregnes præcis som grænseværdier for en uendelig følge.

Dermed kan vi bruge mange af de regnearbejder, som vi mødte i afsnit 9.1. Dette er udtrykt i Sætning 7.

Sætning 7:

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, da gælder

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$

(c) $a_n \leq b_n$ for alle $n \geq 1$
 $\Downarrow$
 $A \leq B$

Bemærk: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ og

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$ i mange tilfælde.
 (Hvorfor?)

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \neq$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot 2 = 4$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \neq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{1} = 1$

Öcning 4:

$$\Downarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \quad \text{Bemærk: } \underline{\text{ikke}} \uparrow !$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

D.v.s. (ved kontraposition):

$$\Downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergerer}$$

Bevis:

$$\begin{aligned} & \updownarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \\ & \updownarrow S_n \text{ konvergerer} \\ & \updownarrow \exists s \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \end{aligned}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

D.v.s.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

D.v.s.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= s - s \\ &= 0 \end{aligned}$$



Husk, at det modsatte **ikke** gælder:

Eks: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, men $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverger mod ∞ .

D.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ er en **nødvendig**, men **ikke tilstrækkelig betingelse** for, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer.

Eks 5(a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ diverger mod ∞ ,

da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} > 0$.

Løsning 5:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

$\Leftrightarrow$

$\forall N \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerer

Bevis: Opgave 23.

D.v.s. konvergenen afhænger kun af rækens "hale" (tail).

D.v.s. det er ok blot at udføre konvergenstests'ne i afsnit 9.3 på rækens hale.

Afsnit 9.3: Konvergens-kriterier for positive rækker

Sætning 8: (Integral-kriteriet)

Hvis $a_n = f(n)$,
hvor f er positiv, kontinuert og aftagende
på $[N, \infty)$, $N \in \mathbb{Z}^+$

da gælder, at

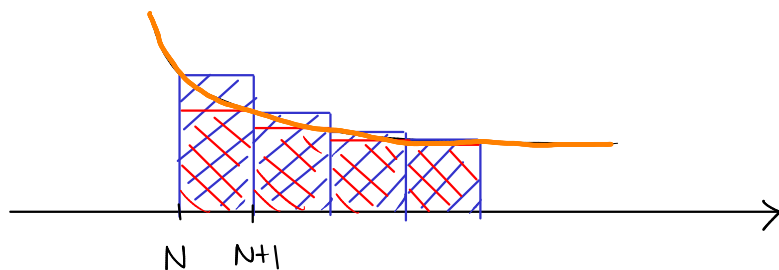
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konvergerer}$$

Bevis: Samme slags argument som for Coupon Collector:

Sætning 5:

For alle $N \in \mathbb{Z}^+$ gælder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$



$$\int_N^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=N}^{\infty} a_n, \text{ da } f \text{ er aftagende}$$

Da f er positiv, betyder det, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Rightarrow \int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.}$$

Tilsvarende:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leq \int_N^{\infty} f(x) dx$$

Da $\{a_n\}$ er positiv, betyder det, at

$$\int_N^{\infty} f(x) dx \text{ konv.} \Rightarrow \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv.}$$

□

Eks 9.3.1: p-rækker (Generaliserer H_n)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left\{ \begin{array}{l} \text{konvergerer, hvis } p > 1 \\ \text{divergerer mod } \infty, \text{ hvis } p \leq 1 \end{array} \right\} \text{ God at huske!}$$

Bevis:

$$\underline{p \leq 0}: \frac{1}{n^p} = n^{\overbrace{-p}^{\geq 0}} \geq n^0 = 1$$

$$\text{D.v.s. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \geq 1 > 0$$

Dermed divergerer rækken mod ∞ ifølge Sætning 4.

$p > 0$: Bruger Integral-Kriteriet:

$$\underline{0 < p < 1}: \int_1^{\infty} n^{-p} dn = \left[\frac{n^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} \overset{\text{da } 1-p > 0}{=} \infty - \frac{1}{1-p} = \infty$$

$\Rightarrow$ divergerer mod ∞

$$\underline{p = 1}: \int_1^{\infty} n^{-p} dn = \left[\ln n \right]_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$$

$\Rightarrow$ divergerer mod ∞

$$\underline{p > 1}: \int_1^{\infty} n^{-p} dn = \left[\frac{n^{1-p}}{1-p} \right]_1^{\infty} = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

$\Rightarrow$ konvergerer

□