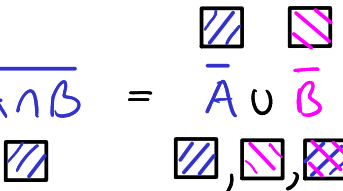
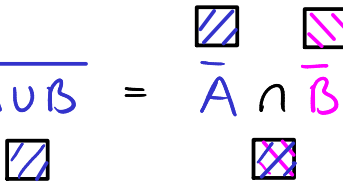
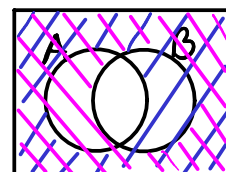
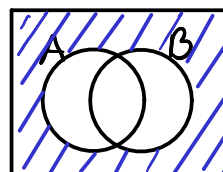
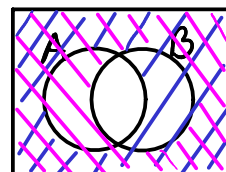
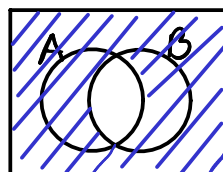


# Sidste gang

Mængder (afsnit 2.2)

Tabel 2.2.1: Mængde-love (s. 136)  
 ~ Tabel 1.3.6 (s. 29)

| De Morgans Love                                                                                                                 |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$   |  |
| $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$  |  |



A og B er **disjunkte**  $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$   
 Eks:  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{4, 5, 6\}$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad (\text{Def. 2.2.6})$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad (\text{Def. 2.2.7})$$

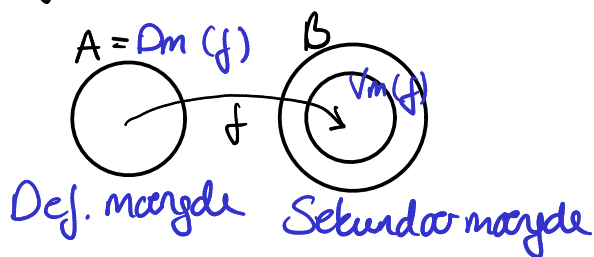
Eks:  $A_1 = \{1, 2\}$ ,  $A_2 = \{1, 3\}$ ,  $A_3 = \{1, 4\}$ ,  $A_4 = \{1, 5\}$

$$\bigcup_{i=1}^4 A_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\bigcap_{i=1}^4 A_i = \{1\}$$

# Funktioner

$$f: A \rightarrow B$$



$$\text{Surjektiv: } B = Vm(f)$$

$$\text{Injektiv: } |A| = |Vm(f)|$$

$$\text{Bijektiv: Injektiv og surjektiv}$$

↙ i sekundærmængden

Injektiv: Hver y-værdi "rammes" af **højst** en x-værdi.

Surjektiv: Hver y-værdi "rammes" af **mindst** en x-værdi.

Bijektiv: Hver y-værdi "rammes" af **præcis** en x-værdi.

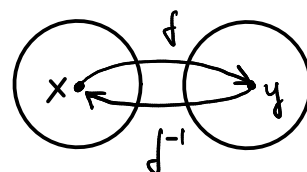
$f$  er **invertibel**, hvis den er bijektiv.

Ekse:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2$

$$y = 3x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3}$$

D.v.s.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$



$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Eks: } f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+, f = \frac{1}{x+1}$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g = x^2 + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 2}$$

(Strengt) voksende

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(<)}{\leq} f(x_2)$$

(Strengt) aftagende

$$\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{\geq} f(x_2)$$

Monoton

Voksende eller aftagende

1 dag

Kardinalitet af mængder (afsnit 2.5)

Rekursive definitioner (afsnit 5.3)

Stærk induktion (afsnit 5.2)

## Kardinalitet af mængder

(afsnit 2.5)

$|A|$ : kardinaliteten af  $A$   
# elementer i  $A$ , hvis  $A$  er endelig

Eks:

$$|\{2, 4, 6, 8\}| = 4$$

$$|\{a, b, c, d\}| = 4$$

$$|\{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}| = ?$$

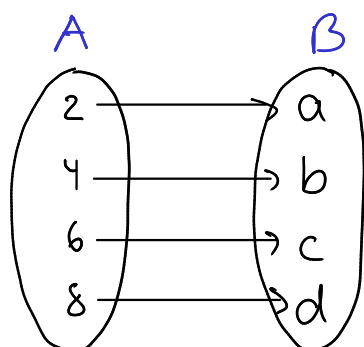
$$|\mathbb{Z}^+| = ?$$

Def 2.5.1

$$\begin{aligned} &|A| = |B| \\ \Leftrightarrow &\exists \text{ bijektion } f: A \rightarrow B \end{aligned}$$

Eks:

$$|\{2, 4, 6, 8\}| = |\{a, b, c, d\}|:$$



$$|\{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}| = |\mathbb{Z}^+|:$$

Lad  $L^+ = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ .

| $\mathbb{Z}^+$ | $L^+$    |
|----------------|----------|
| 1              | 2        |
| 2              | 4        |
| 3              | 6        |
| 4              | 8        |
| 5              | 10       |
| $\vdots$       | $\vdots$ |

$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow L^+, f(n) = 2n$   
er en bijektion

D.v.s.

$$|\mathbb{Z}^+| = |L^+|$$

Hvad er så kardinaliteten af  $\mathbb{Z}^+$  og  $L^+$  ?

### Def. 2.5.3

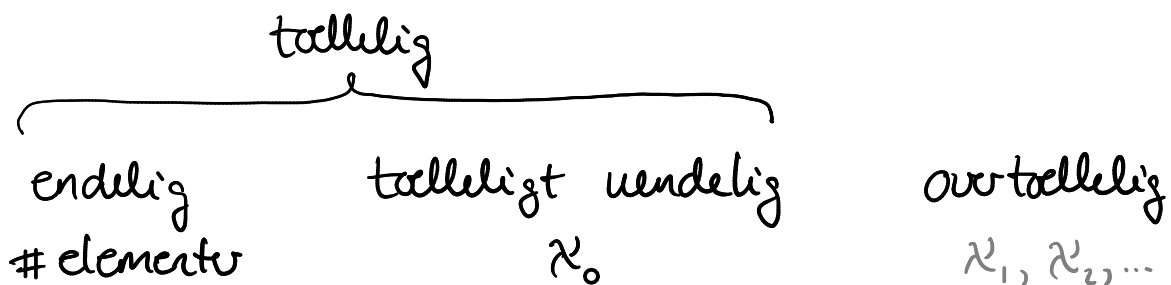
Kardinaliteten af  $\mathbb{Z}^+$  kaldes  $\aleph_0$  (alef 0).

En mængde, som er endelig eller har kardinalitet  $\aleph_0$  kaldes tællelig (countable).

En mængde med kardinalitet  $\aleph_0$  kaldes tælleligt uendelig (countably infinite)

En mængde, som ikke er tællelig, kaldes overtællelig (uncountable).

D.v.s.:



D.v.s.  $|\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{L}^+| = \aleph_0$

Eks 3:  $\mathbb{Z}$  har samme kardinalitet som  $\mathbb{Z}^+$ :

$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots$  (uendelig opremsning af  $\mathbb{Z}$ )  
 $f(1) \nearrow \quad \nearrow f(2) \quad \nearrow f(3) \quad \nearrow f(4) \quad \dots$

Eller:

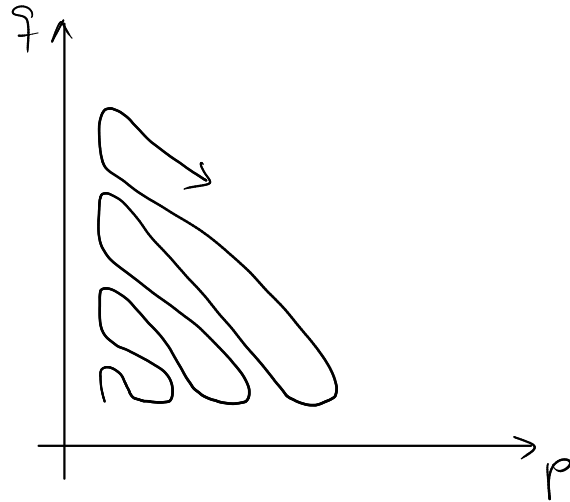
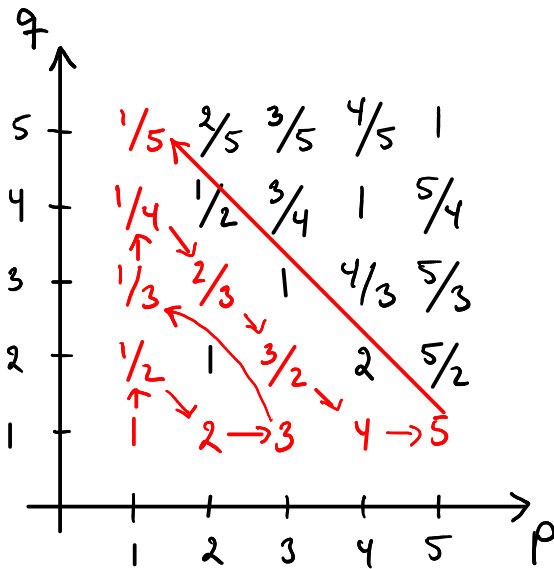
$$f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{hvis } n \text{ er ulige} \\ -\frac{n}{2}, & \text{hvis } n \text{ er lige} \end{cases}$$

(bijektion mellem  $\mathbb{Z}^+$  og  $\mathbb{Z}$ )

D.v.s.  $\mathbb{Z}$  har kardinalitet  $\aleph_0$ .

#### Eks 4: $\mathbb{Q}^+$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$



$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \dots$

$\mathbb{Q}$  er også tællelig:

Gør det samme med  $\mathbb{Q}^-$  som med  $\mathbb{Q}^+$ .  
Start med 0, og flet så  $\mathbb{Q}^+$  og  $\mathbb{Q}^-$ ,  
som vi gjorde med  $\mathbb{Z}^+$  og  $\mathbb{Z}^-$ .



## Eks 5: $\mathbb{R}$ er overtællelig:

Diagonalisering:

Antag til **modstrid**, at  $\mathbb{R}$  er tællelig.

Da er  $R = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 < r < 1\}$  **tællelig** (opgave 16)



Lad  $R_0$  bestå af de tal i  $R$ , hvis decimaler er udelukkende 0'er og/eller 1-taller.

D.v.s.  $R_0 = \{0,1, 0,01, 0,11, 0,001, \dots\}$

$R_0$  er også tællelig, da  $R_0 \subseteq R$ .

D.v.s. elementene i  $R_0$  kan opremses:

$$r_1 = 0, d_{11} d_{12} d_{13} \dots$$

$$r_2 = 0, d_{21} d_{22} d_{23} \dots$$

$$r_3 = 0, d_{31} d_{32} d_{33} \dots$$

$\vdots$

Men uanset, hvilken rækkefølge vi remser tallene op i, kan man altid **konstruere et tal  $s$ , som ikke har en plads i opremsningen:**

$$s = 0, d_1 d_2 d_3 \dots, \text{ hvor}$$

$$d_i = \begin{cases} 0, & \text{hvis } d_{ii} = 1 \\ 1, & \text{ellers} \end{cases}$$



Eks:

$$r_1 = 0,100000\dots \neq S$$

$$r_2 = 0,010000\dots \neq S$$

$$r_3 = 0,110000\dots \neq S$$

$$r_4 = 0,001000\dots \neq S$$

$$r_5 = 0,011000\dots \neq S$$

$\vdots$

$$S = 0,00111\dots$$

## Rekursive definitioner

(Afsnit 5.3)

Eks:

Kaniner får et par unger hver måned,  
fra de er to måneder  
Ingen kaniner dør.

Et par nyfødte kaniner sættes ud på en  
kaninløs ø.

Ved starten af den  $n$ 'te måned er der  
 $f_n$  kaniner på øen.

| $n$ | $f_n$ |
|-----|-------|
| 0   | 0     |
| 1   | 1     |
| 2   | 1     |
| 3   | 2     |
| 4   | 3     |
| 5   | 5     |
| 6   | 8     |
| 7   | 13    |

## Fibonacci-tallene

$$f_0 = 0$$

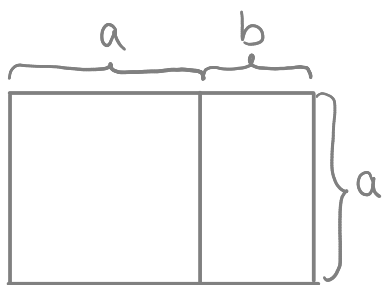
$$f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad \text{for } n \geq 2$$

Eks 5.3.4: Fibonacci-tallene vokser eksponentielt:

$$\boxed{f_n > \varphi^{n-2}, \quad n \geq 3}, \quad \text{hvor } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

kaldes det gyldne snit (golden ratio):



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \varphi$$

$\varphi$  har også andre interessante egenskaber.  
En af dem skal vi bruge om lidt:

$$\begin{aligned} \hat{=} \quad \varphi^2 &= \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \varphi^2 &= 1 + \varphi \quad (*) \end{aligned}$$

Basis  $\left\{ \begin{array}{l} \bullet f_3 = 2 \\ \varphi^{3-2} = \varphi \approx 1,618 < f_3 \quad - \text{OK!} \\ \bullet f_4 = 3 \\ \varphi^{4-2} = \varphi^2 = 1 + \varphi \approx 2,618 < f_4 \quad - \text{OK!} \\ \bullet f_5 = f_4 + f_3 \\ > \varphi^2 + \varphi \quad (\text{bevist ovenfor}) \\ = \varphi(\varphi + 1) \\ = \varphi \cdot \varphi^2, \quad \text{iflg. (*)} \\ = \varphi^3 \end{array} \right.$

Induktionsantagelse:  $f_{k-1} > \varphi^{k-3}$  og  $f_k > \varphi^{k-2}$

Induktionsskridt:  $k \geq 4$

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + f_{k-1} \\ &> \varphi^{k-2} + \varphi^{k-3}, \quad \text{iflg. ind. ant.} \\ &= \varphi^{k-3}(\varphi + 1) \\ &= \varphi^{k-3} \cdot \varphi^2, \quad \text{iflg. (*)} \\ &= \varphi^{k-1} \end{aligned}$$

Herved har vi bevist uligheden fra Eks. 5.3.4  
v.h.a. stærk induktion.  $\square$

Hvis vi lader  $P(n)$  være udsagnet  $\int_n > \varphi^{n-2}$ , så er  
beviset nemt at bevise:

$$P(3)$$

$$P(4)$$

$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$\vdots$

## Stærk induktion (Afsnit 5.2)

Mer generel formulering af induktionsprincippet:

### Stærk induktion

Bevis  $P(n)$ , for alle  $n \geq m$

---

Basis: Bevis  $P(m), P(m+1), \dots, P(m+l)$ ,  $l \geq 0$

Induktionsskridt: Bevis  $P(m) \wedge P(m+1) \wedge \dots \wedge P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ,  
for alle  $k \geq m+l$

Eller bevis  $P(m) \wedge \dots \wedge P(k-1) \Rightarrow P(k)$ , for  $k \geq m+l+1$

Eller ...

Eks. overfor:  $m=3$ ,  $l=1$

I forbindelse med simpel induktion brugte vi en domino-analogi.

I forbindelse med stærk induktion kan man tænke på en uendeligt høj stige:

I basis-skridtet viser vi, at vi kan nå de  $l+1$  nederste trin.

I induktionsskridtet viser vi, at hvis vi kan nå de  $k-1$  nederste trin, kan vi også nå det  $k$ 'te trin.