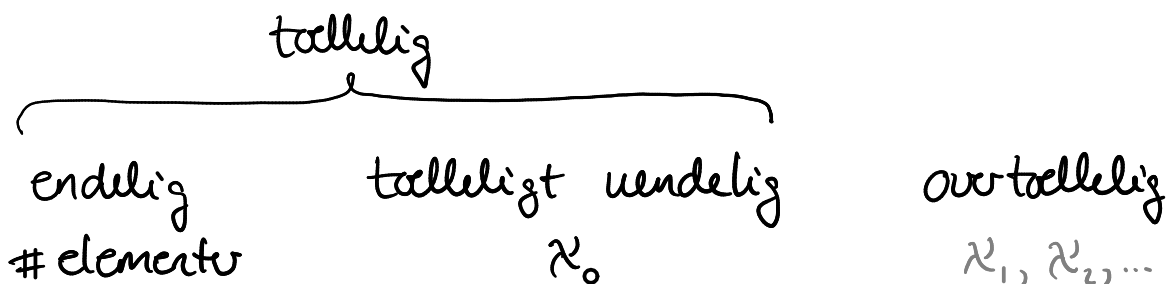
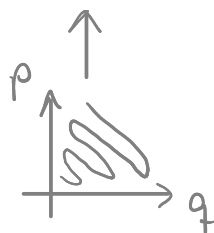


Sidste gang

Kardinalitet (afsnit 2.5)

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \exists \text{ bijektion } f: A \rightarrow B \quad (\text{Def 2.5.1})$$

$$|\{2n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0 \\ = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Q}|$$



$\mathbb{R}$ er over-tællelig
Modstridsbevis:

0, 1

0, 0 1

0, 1 1 0

0, 0 0 1 0

$\vdots$

$s = 0, 0 0 1 1$

Rekursive definitioner

Fibonacci-tallene:

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}, \quad n \geq 2$$

Stærk induktion

$$f_n > \varphi^{n-2}, \quad n \geq 3, \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$$

Basis:

Benytter, at $\varphi^2 = 1 + \varphi$ (*)

Basis:

$$f_3 = 2 > \varphi$$

$$f_4 = 3 > \varphi^2$$

Ind. ant.:

$$f_{k-1} > \varphi^{k-3} \quad \text{og} \quad f_k > \varphi^{k-2}$$

Ind. skridt:

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_{k-1} + f_k \\ &> \varphi^{k-3} + \varphi^{k-2}, \quad \text{ifølge ind. ant.} \\ &= \varphi^{k-3}(1 + \varphi) \\ &= \varphi^{k-3} \cdot \varphi^2, \quad \text{ifølge (*)} \\ &= \varphi^{k-1} \end{aligned}$$



$$P(n): f_n > \varphi^{n-2}$$

$$P(3)$$

$$P(4)$$

$$P(3) \wedge P(4) \Rightarrow P(5)$$

$$P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(3) \wedge P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

1 dag

Stærk induktion

Et eksempel mere (afsnit 5.2)

Relationer

Egenskaber (afsnit 9.1)

Repræsentationer (afsnit 9.2)

Eks: Ethvert heltal $n \geq 4$ kan skrives som en sum af 2-taller og 5-taller.

D.v.s.

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 4 : \exists a, b \in \mathbb{N} : \underbrace{n = 2a + 5b}_{P(n)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 = 2 \cdot 2 \quad (a=2, b=0) \\ 5 = 5 \cdot 1 \quad (a=0, b=1) \end{array} \right\} \text{Basis } (n=4, n=5)$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$7 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1$$

$$8 = 2 \cdot 4$$

$$9 = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

$$P(5) \Rightarrow P(7) \Rightarrow P(9) \Rightarrow \dots$$

Ind. ant: $P(k-2) : \exists a, b \in \mathbb{N} : k-2 = 2a + 5b$

Ind. skridt: For $k \geq 6$ gælder:

$$k = k - 2 + 2$$

$$= 2a + 5b + 2, \text{ hvor } a, b \in \mathbb{N}, \text{ ifølge ind. ant.}$$

$$= 2(a+1) + 5b, \text{ hvor } a+1, b \in \mathbb{N}$$

□

Vi har bevist

$$P(4)$$

$$P(5)$$

$$P(4) \wedge P(5) \Rightarrow P(6)$$

$$P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \Rightarrow P(7)$$

$$P(4) \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge P(7) \Rightarrow P(8)$$

$\vdots$

$$m=4, \quad l=1$$

Bemærk, at vi er nødt til at behandle både $n=4$ og $n=5$ i basis-skridtet. Hvis vi kun behandler $n=4$, har vi kun bevist udsagnet for lige n -værdier:

$$P(4)$$

$$P(4) \Rightarrow P(6) \Rightarrow P(8) \Rightarrow \dots$$

Relationer (Kapitel 9)

Beskriver en sammenhæng ml. elementer i en eller flere mængder.

Bruges f.eks. i databaser.

Eks:

(studie-nr., navn, adresse, uddannelse) kvartet relation

(studie-nr, kursus)

$<, =, |, \text{"er barn af"}$

} binære relationer

Vi skal kun beskæftige os med binære relationer:

Def 9.1.1

A, B : mængder

En relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$

Eks. overfor:

A : mængde af studie-nr, B : mængde af kurser

eller

$A = B = \mathbb{Z}$

eller...

Eks: (Relation fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}^+$)

$$R_{inv} = \{ (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid b = \frac{1}{a} \}$$
$$= \{ (1, 1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), \dots \}$$

NB: $(2, \frac{1}{2}) \in R_{inv}$, men
 $(\frac{1}{2}, 2) \notin R_{inv}$, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \in R$ skrives også

$a R b$ og læses

„a er relateret til b gennem R“

↑
rækkefølgen har betydning
(medmindre R er symmetrisk)

$(a, b) \notin R$ skrives også

$a \not R b$

Eks: $5 R_{inv} \frac{1}{5}$, men $6 \not R_{inv} \frac{1}{5}$

$5 = 5$, men $5 \neq 6$

Eks: $R_< = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \mid a < b \}$
 $= \{ (1,2), (1,3), (2,3), (1,4), \dots \}$

Relationer er en generalisering af funktioner:

$f: A \rightarrow B$ knytter ét element fra B til hvert element i A .
 En relation fra A til B knytter 0, 1 eller flere elementer fra B til hvert element i A .

Eks: $R_{abs} = \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |a| = |b| \}$
 $= \{ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a=b \vee a=-b \}$
 $= \{ (0,0), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1), (2,2), \dots \}$

Def. 9.1.2

A : mængde

En relation på A er en relation fra A til A ,
 d.v.s. er delmængde af $A \times A$

Fra nu af kun denne slags relationer.

Eks: $R_<$ er en relation på $\mathbb{Z}^+$
 R_{abs} er en relation på $\mathbb{Z}$

Repræsentationer af relationer (afsnit 9.3)

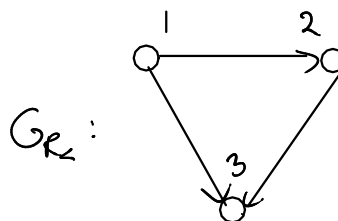
Man kan repr. rel. u.h.a.

- Opremsning
- Mængde-byggeset notation
- Matricer (Hvis A, B endelige)
- Orienterede grafer (Hvis $A=B$ og A endelig)
(digraphs)

Eks: $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_< = \{(a,b) \in A \times A \mid a < b\} = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$$

$$M_{R_<} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Eks: R_p relation på $\{1, 2, 3, 4\}$

$$R_p = \{(a,b) \mid a \text{ og } b \text{ har samme paritet}\}$$

$$= \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaber

Def. 9.1.3

R : relation på A

R er **refleksiv**, hvis

$(a,a) \in R$, for alle $a \in A$

Eks:

✓: $\leq$, $=$, $|$

✗: $<$, $\neq$

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er refl.?
graf -

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **symmetrisk**, hvis

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$, for alle $a,b \in A$

Eks:

✓: Samme paritet, $=$, $|\cdot|$, $\neq$

✗: $<$, $\leq$, $|$, R

Hvordan ser man på matrix-repr., om rel. er symm.?
graf -

Def. 9.1.4

R : relation på A

R er **antisymmetrisk**, hvis

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b, \text{ for alle } a,b \in A$$



$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R \vee a=b$$



$$(a,b) \in R \wedge a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin R$$

Eks:

Anti-symmetrisk: $<, \leq, =, |$

Symmetrisk: $=$, samme paritet

Ingen af delene: $\{(1,1), (1,2), (2,1), (1,3)\}$