Skriftlig Eksamen
Introduktion til lineær og heltalsprogrammering (DM515)

Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

Mandag den 23 Juni 2008, kl. 9–13

Alle sædvanlige hjælpemidler (lærebøger, notater etc.) samt brug af lommeregner er tilladt. Det er ikke tilladt at anvende en computer. Eksamenssættet består af opgaver på 8 nummererede sider (1–8). Fuld besvarelse er besvarelse af alle opgaver. De enkelte opgavers vægt ved bedømmelsen er angivet i procent. **Husk at begrunde alle dine påstande!**. Der må gerne refereres til resultater fra lærebogen. Specielt må man gerne begrunde en påstand med at henvise til, at den umiddelbart følger fra et resultat i lærebogen (hvis dette altså er sandt!). I må gerne bruge metoder eller udvidelser af sætninger som er udledt i opgaver, der er stillet i løbet af kurset

Bemærk dog, at det ikke er tilladt at besvare et delspørgsmål, udelukkende med en henvisning til, at det følger af en af opgaverne. Henvisninger til andre bøger (ud over kursusmaterialet) accepteres ikke som besvarelse af et spørgsmål!

OPGAVE 1 Simplex metoden og det duale problem (20 %)

Betragt følgende lineære programmeringsproblem (P1):

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & 2x_1 + 4x_2 - x_3 & \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_3 & \leq 6 \\ & 3x_2 - x_3 & \leq 9 \\ & x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Spørgsmål a:

Omskriv problemet til ligningsform (equational form) ved at tilføje slackvariable x_4, x_5, x_6, svarende til de tre begrænsninger (regnet oppefra) og opskriv det første simplex tableau med x_4, x_5, x_6 som basisløsning.

Spørgsmål b:

Argumenter for, at x_2 med fordel kan bringes ind i basisløsningen og udfør et pivot skridt som bringer x_2 ind i basisløsningen.

Spørgsmål c:

Efter endnu et pivot skridt, denne gang med x_1 som den indgående variabel (du skal ikke udføre dette skridt!), opnås følgende simplex tableau:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_5 - x_6 \\ x_2 & = & 3 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_5 \\ x_4 & = & 4 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 + 2x_6 \\ \hline z & = & 14 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 - 2x_6 \end{array}$$

Argumenter for, at der er fundet en optimal løsning og angiv denne løsning samt dens objektfunktionsværdi.

Spørgsmål d:

Angiv det duale problem til (P1), hvor du bruger tre duale variable y_1, y_2, y_3, svarende til hver af de tre første uligheder i (P1) taget oppefra.

Spørgsmål e:

Gør rede for at $(y_1, y_2, y_3) = (0, \frac{2}{3}, 2)$ er en optimal løsning til det duale problem.

Spørgsmål f:

Antag nu at d_1, d_2, d_3 er reelle tal og at de tre uligheder i (P1) ændres som følger:

$$\begin{array}{lrl} \text{maximize} & 2x_1 + 4x_2 - x_3 & \\ \text{subject to} & 2x_1 - x_3 & \leq 6 - d_1 \\ & 3x_2 - x_3 & \leq 9 - d_2 \\ & x_1 + x_2 & \leq 4 - d_3 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

Forklar hvordan man, uden at løse problemet forfra, dels kan opstille den endelige simplex tableau for det nye problem, dels kan udlede hvilke grænser d_1, d_2, d_3 skal ligge indefor, for at x_1, x_2, x_4 stadig udgør en optimal basis (du skal ikke gøre dette, men blot opstille de begrænsninger man kan udlede direkte af det sidste simplex tableau).

Spørgsmål g:

Brug udregningerne ovenfor og det modificerede simplex tableau til at aflæse en optimal løsning (og dennes værdi), når $(d_1, d_2, d_3) = (0, 9, 1)$ og når $(d_1, d_2, d_3) = (6, 0, 1)$. Husk at argumentere for at (x_1, x_2, x_4) stadig er en optimal basis løsning.

OPGAVE 2 Flows(20 %)

Lad $\mathcal{N}$ være netværket i Figur 1.

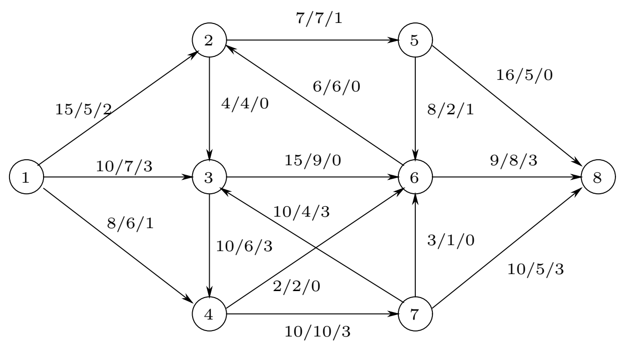

Figure 1: Et netværk $\mathcal{N}$ med kapaciteter, flow og nedre grænser som vist på hver kant i formatet $u/x/\ell$.

Spørgsmål a:

Gør rede for, at x er en lovlig (feasible) $(1, 8)$-strøm og angiv dens værdi.

Spørgsmål b:

Dekomponer x i vej og kredsstrømme efter opskriften i afsnit 3.3 i Digraphs. Du skal forklare hvordan du finder de enkelte komponenter i dekomponeringen.

Spørgsmål c:

Tegn residual netværket $\mathcal{N}(x)$ og forklar kort hvordan du finder kapaciteterne af kanterne i $\mathcal{N}(x)$ (det er nok at give et par eksempler).

Spørgsmål d:

Gør rede for, at x ikke er en maksimum $(1, 8)$-strøm i $\mathcal{N}$ og vis hvordan man kan udvide x til en maksimum $(1, 8)$-strøm. Husk at argumentere for at den resulterende strøm faktisk er en maksimum $(1, 8)$-strøm.

Spørgsmål e:

Angiv, med begrundelse, en nedre grænse for værdien af en minimum $(1, 8)$-strøm i $\mathcal{N}$, vis at x ikke er en minimum $(1, 8)$-strøm i $\mathcal{N}$ og forklar hvordan man kan finde en minimum $(1, 8)$-strøm i $\mathcal{N}$ (du skal ikke udføre algoritmen).

OPGAVE 3 Formulering af LP og IP problemer (25 %)

Spørgsmål a:

En fabrik som producerer to typer maling I og U (indendørs og udenførs) benytter de samme to kemikalier $K1, K2$ til produktionen af I og U. Til fremstilling af 1 ton af I benyttes 6 tons af $K1$ og 1 ton af $K2$ og til fremstilling af 1 ton af U benyttes 4 tons af $K1$ og 2 tons af $K2$. Fabrikken kan sælge et ton af I med en profit på 50000 kr og et ton af U med en profit på 40000 kr. Råvare leverancen er sådan at firmaet kan bruge op til 24 tons af $K1$ og op til 6 tons af $K2$ per dag. En markedsanalyse viser at det daglige salg af I ikke kan overstige det daglige salg af U med mere end 1 ton. Fabrikken ønsker din hjælp til at bestemme det optimale produktmiks af I og U som optimerer den daglige indtjening.

Opstil en lineær programmeringsmodel for dette problem. Du skal begrunde dine valg af variable og begrænsninger.

Spørgsmål b:

Lad $D = (V, A)$ være en digraf i hvilken alle punkter har mindst en kant ind til sig. For et givet punkt $v \in V$ er **viften** $W_v \subset A$ mængden af de kanter fra A som starter i punktet v (se Figur 2). **Viftedækningsproblemet** for digrafen D består i at finde det mindste antal vifter der skal til at dække alle punkter, hvor vi siger at punktet u er dækket af en vifte W_v hvis $v \to u$ er en kant i D, dvs $v \to u \in W_v$. Formuler viftedækningsproblemet for en generel digraf som et heltalsprogrammeringsproblem og opskriv derefter formuleringen for digrafen i Figur 2.

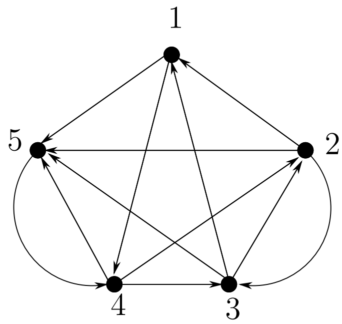

Figure 2: En digraph D. Viften W_1 består af kanterne $1 \to 5$ og $1 \to 4$.

Spørgsmål c:

Opskriv LP relakseringen af viftedækningsproblemet. Forklar hvilken grænse denne giver og hvornår vi får en gyldig grænse (er en vilkårlig løsning nok til at få en grænse, eller skal man have en optimal løsning?). Diskuter hvor god denne grænse er i forhold til den optimale heltalsløsning.

OPGAVE 4 Gyldige uligheder (15 %)

Spørgsmål a:

Antag, at vi under løsningen af LP relakseringen af et heltalsprogrammeringsproblem (IP) har fundet et optimalt simplex tableau (dvs. et som viser at den aktuelle basisløsning er optimal), hvori en af basisvariablene x_0 er givet ved

$$x_0 = \frac{15}{4} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{7}{4}x_2 - \frac{11}{4}x_3 \tag{1}$$

Vis hvordan man kan udlede følgende gyldige ulighed (et Gomory cut) ud fra (1) og forklar hvorfor tilføjelse af (2) til det oprindelige heltalsprogrammeringsproblem (IP) vil afskære den aktuelle optimale LP løsning.

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{3}{4}x_3 \geq \frac{3}{4} \tag{2}$$

Spørgsmål b:

Betragt LP relakseringen af TSP problemet med 10 punkter og antag at den optimale LP løsning x^* har strukturen som vist i Figur 3. Find en Comb ulighed som ikke er overholdt af x^*.

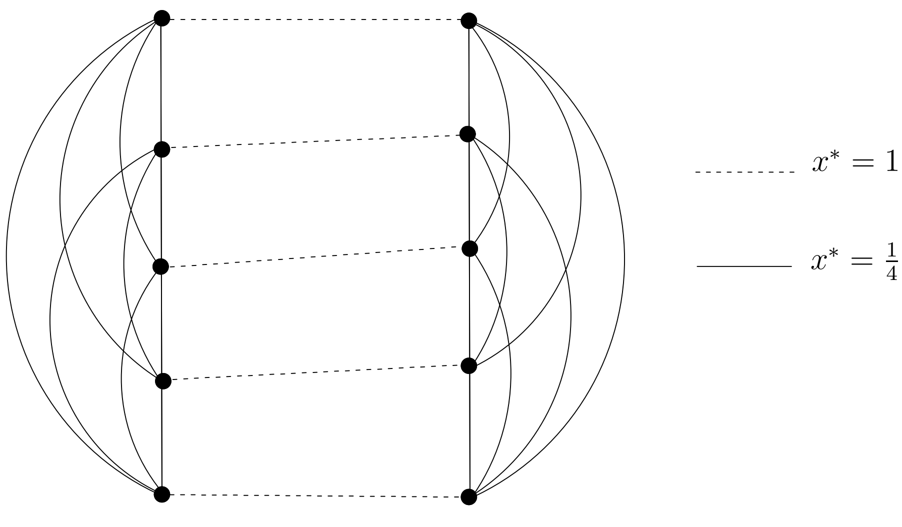

Figure 3: En optimal løsning til LP relakseringen af et TSP problem. Stiplede kanter har $x^* = 1$ de fulde kanter har $x^* = \frac{1}{4}$. Alle kanter som ikke er vist har $x^* = 0$.

Spørgsmål c:

Betragt LP relakseringen af TSP problemet med 9 punkter og antag at den optimale LP løsning y^* har strukturen som vist i Figur 4. Gør rede for at y^* overholder alle Comb ulighederne og alle deltureliminerings ulighederne. Hint: den eneste relevante størrelse af H (i Comben $H, T_1, T_2, \ldots, T_{2k+1}$) er 3.

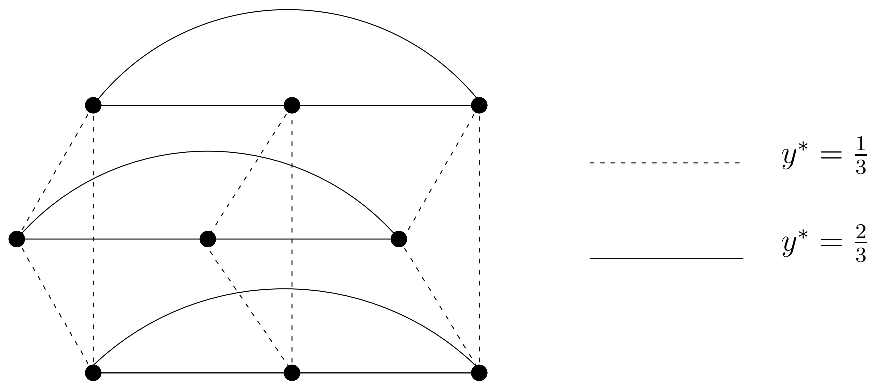

Figure 4: En optimal løsning til LP relakseringen af et TSP problem. Stiplede kanter har $y^* = \frac{1}{3}$ de fulde kanter har $y^* = \frac{2}{3}$. Alle kanter som ikke er vist har $y^* = 0$

Spørgsmål d:

Antag, at vi udover y^* også har det sidste simplex tableau som viser at y^* er en optimal basis løsning (vi viser kun værdier over 0 i Figur 4). Forklar hvordan vi kunne bruge dette tableau til at udlede en ulighed som er overholdt af alle heltalsløsninger til vores TSP problem, men ikke af y^*.

OPGAVE 5 Branch and Bound (20 %)

Betragt instansen af TSP med 5 punkter og 10 kanter som vist i Figur 5. Turen $T = 152431$ har omkostning 24 og bruges som start løsning nedenfor.

Spørgsmål a:

Find et optimalt 1-træ, når knude 1 bruges som det specielle punkt. Hvilken nedre grænse giver dette for længden af en optimal TSP tur?

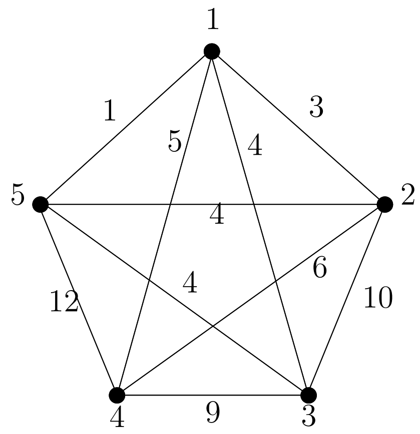

Figure 5: En TSP instans

Spørgsmål b:

Løs TSP problemet fra Figur 5 til optimalitet ved hjælp af branch and bound, hvor du bruger 1-træer som nedre grænse (det er altid knude 1 der er den specielle knude) og starter med turen T som en kendt øvre grænse. Forgreningen i branch and bound træet skal foretages ved at udelukke kanter ved et udvalgt punkt som har valens mindst 3 i 1-træet.**Ved det første 1-træ skal du forgrene ud fra kanterne som er incidente med punkt 5**. Du skal også beregne den nedre greænse for alle de nye knuder i branch and bound træt, så snart du laver dem.

Forklar kort (med begrundelser) hvad du konkluderer i de enkelte skridt, hvilke knuder i branch and bound træet du er nød til at forsætte fra (branche) og hvilke du kan afslutte.