Normerede rum

1

I disse noter vil alle vektorrum være vektorrum over $\mathbb{R}$. Alle resultater og beviser kan dog med små modifikationer overføres til komplekse vektorrum. Vi minder om, at hvis X og Y er vektorrum, så kaldes en funktion $F : X \to Y$ lineær, hvis der for alle $x, y \in X$ og alle $t \in \mathbb{R}$ gælder, at $F(tx + y) = tF(x) + F(y)$. Det ses umiddelbart, at hvis F er lineær, så er $F(0) = 0$, og F er 1–1, hvis og kun hvis $F(x) = 0$ implicerer $x = 0$.

I det følgende vil vi undersøge normerede rums basale egenskaber, og for at simplificere notationen vil vi bruge den samme betegnelse, nemlig $\|\cdot\|$, for alle normer bortset dog for normerne på $\mathbb{R}^n$.

Vi starter med følgende sætning.

Sætning 1.1 *Lad X og Y være normerede rum, og $F : X \to Y$ en lineær afbildning. Følgende udsagn er ækvivalente:*

(i) *F er kontinuert.*

(ii) *F er kontinuert i 0.*

(iii) *Der findes en konstant $K \geq 0$, således at*

$$\|F(x)\| \leq K\|x\| \quad \text{for alle } x \in X.$$

Bevis: Det er klart, at $(i) \Rightarrow (ii)$. For at vise at $(ii) \Rightarrow (iii)$ antager vi, at (iii) ikke gælder og skal så vise, at F ikke er kontinuert i 0.

Da (iii) ikke gælder, kan vi til ethvert $n \in \mathbb{N}$ finde et $y_n \in X$, så $n\|y_n\| < \|F(y_n)\|$. Sæt $x_n = \frac{1}{n\|y_n\|} y_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi finder da

$$\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{for } n \to \infty,$$

som viser, at $x_n \to 0$ for $n \to \infty$. Da F er lineær, finder vi, at

$$\|F(x_n)\| = \frac{1}{n\|y_n\|}\|F(y_n)\| > 1 \qquad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

hvilket viser, at $F(x_n)$ ikke går mod 0 i Y. F er altså ikke kontinuert i 0.

Lad nu (iii) gælde. For at vise at F er kontinuert, vælger vi et vilkårligt punkt $x \in X$ og vil vise kontinuitet i x. Hvis $(x_n) \subseteq X$ er en vilkårlig følge med $x_n \to x$ for $n \to \infty$, så fås af (iii), at

$$\|F(x) - F(x_n)\| = \|F(x - x_n)\| \leq K\|x - x_n\| \to 0 \quad n \to \infty,$$

som viser, at $F(x_n) \to F(x)$. Vi har dermed vist, at F er kontinuert i x. □

Vi får brug for følgende definition.

Definition 1.2 *Lad X og Y være normerede rum. En bijektiv lineær afbildning $F : X \to Y$ kaldes en isomorfi af X på Y, hvis både F og F^{-1} er kontinuerte.*

X og Y kaldes isomorfe, hvis der findes en isomorfi af X på Y.

Det følger umiddelbart af Sætning 1.1, at der gælder:

Sætning 1.3 *Lad X og Y være normerede rum og $F : X \to Y$ en surjektiv lineær afbildning. Følgende udsagn er ækvivalente:*

(i) *F er en isomorfi af X på Y.*

(ii) *Der findes $0 < a \leq b$, således at*

$$a\|x\| \leq \|F(x)\| \leq b\|x\| \qquad \text{for alle } x \in X \tag{1.1}$$

Den næste sætning viser, at fuldstændighed er invariant under isomorfier.

Sætning 1.4 *Lad X og Y være isomorfe normerede rum. Hvis X er et Banachrum, så er Y også et Banachrum*

Bevis: Lad $F : X \to Y$ være en isomorfi af X på Y og bestem a og b, så (1.1) fra Sætning 1.3 gælder. Vi skal vise, at Y er fuldstændigt og lad dertil $(y_n) \subseteq Y$ være en vilkårlig Cauchyfølge. Hvis vi sætter $x_n = F^{-1}(y_n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, så viser (1.1), at der for alle $n, m \in \mathbb{N}$ gælder:

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{a}\|F(x_n) - F(x_m)\| = \frac{1}{a}\|y_n - y_m\|. \tag{1.2}$$

Dette viser, at (x_n) er en Cauchyfølge, og da X er fuldstændigt, vil den være konvergent. Hvis vi sætter $x = \lim x_n$, så følger det af kontinuiteten af F, at $\lim y_n = \lim F(x_n) = F(x)$.

Vi har dermed vist, at Y er fuldstændigt. □

Den næste sætning viser, at alle endeligt dimensionale normerede rum af samme dimension er isomorfe.

Sætning 1.5 *Hvis X er et normeret rum af dimension n, så er X isomorft med $\mathbb{R}^n$ og dermed fuldstændigt.*

Bevis:

På $\mathbb{R}^n$ benytter vi $\|\cdot\|_2$, altså $\|\mathbf{t}\|_2 = (\sum_{j=1}^n t_j^2)^{\frac{1}{2}}$ for alle $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Lad $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ være en basis for X og definer $F : \mathbb{R}^n \to X$ ved:

$$F(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j \quad \text{for alle } \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

F er klart lineær, og da x_j'erne udspænder X, vil F være på, og da x_j'erne er lineært uafhængige, vil F være 1–1; F er med andre ord en bijektion. For ethvert $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ finder vi, at

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{t})\| = \|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\| \quad &\leq \quad \sum_{j=1}^{n} |t_j| \|x_j\| \leq \qquad (1.4) \\ (\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{n} t_j^2)^{1/2} \quad &= \quad (\sum_{j=1}^{n} \|x\|^2)^{1/2} \|\mathbf{t}\|_2, \end{aligned}$$

hvor vi i den sidste ulighed har benyttet Cauchy– Schwarz' ulighed. (1.4) viser sammen med Sætning 1.1, at F er kontinuert.

Hvis $\|F(\mathbf{t}\| = 0$, så er $F(\mathbf{t}) = 0$, og da F er 1–1, følger det, at $t = 0$.

Sæt nu

$$S = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{t}\|_2 = 1\}.$$

Da S er lukket og begrænset, er den kompakt, og da funktionen $\mathbf{t} \to \|F(\mathbf{t})\|$ er kontinuert, antager den sit minimum på S; sæt

$$a = \min\{\|F(\mathbf{t})\| \mid \mathbf{t} \in S\}.$$

Iføge det ovenstående er $\|F(\mathbf{t})\| > 0$ for alle $\mathbf{t} \in S$, hvorfor $a > 0$. Hvis $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ med $\mathbf{t} \neq 0$, følger det, at

$$\|F(\mathbf{t})\| = \|\mathbf{t}\|_2 \|f(\frac{\mathbf{t}}{\|\mathbf{t}\|_2}) \geq a\|\mathbf{t}\|_2. \tag{1.5}$$

(1.4) og (1.5) viser, at (1.1) i Sætning 1.3 er opfyldt, således at F er en isomorfi. $\square$

I analogi med Sætning 1.5 gælder der, at ethvert n-dimensionalt komplekst vektorrum er isomorft med $\mathbb{C}^n$.

I Matematik B spiller kontinuitet af lineære afbildninger ikke nogen rolle, og det giver den sidste sætning en forklaring på.

Sætning 1.6 *Lad X og Y være normerede rum. Hvis X er endeligt dimensionalt, så er enhver lineær afbildning fra X til Y kontinuert.*

Bevis: Lad $n = \dim X$ og lad $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ være en basis for X. Det følger af formel (1.5) i beviset for Sætning 1.5, at der findes et $a > 0$, så

$$a\|\mathbf{t}\|_2 \leq \|\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\| \quad \text{for alle } \mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Lad nu $T : X \to Y$ være en lineær afbildning. Hvis $x \in X$ er vilkårlig, kan vi finde $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, således at $x = \sum_{j=1}^{n} t_j x_j$, hvilket i forbindelse med Cauchy–Schwarz' ulighed og (1.6) giver:

$$\|T(x)\| = \|\sum_{j=1}^{n} t_j T(x_j)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |t_j| \|T(x_j)\| \leq \tag{1.7}$$

$$(\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^2)^{1/2} (\sum_{j=1}^{n} t_j^2)^{1/2} \leq \frac{1}{a} (\sum_{j=1}^{n} \|T(x_j)\|^2)^{1/2} \|x\|. \tag{1.8}$$

Sammen med (iii) i Sætning 1.1 viser dette, at T er kontinuert. $\square$

Hvis X er et uendeligt dimensionalt normeret rum, så er konklusionen i Sætning 1.6 ikke længere rigtig. end ikke for $Y = \mathbb{R}$.