Opgave 1
Til at beskrive byens restauranter, lad p være udsagnet (= propositionen) "maden er god", q udsagnet "betjeningen er god" og r udsagnet "restauranten er tre-stjernet". Skriv følgende udsagn ved brug af logiske symboler:

(a) enten er maden god, eller betjeningen god, eller begge dele;

(b) enten er maden god, eller betjeningen er god, men ikke begge dele;

(c) maden er god og betjeningen dårlig;

(d) det er ikke sandt, at maden er god og restauranten samtidig tre-stjernet;

(e) hvis både maden og betjeningen er god, så er restauranten tre-stjernet;

(f) det er ikke sandt, at en tre-stjernet restaurant altid har god mad og god betjening.

Opgave 2 Med p: "stoffet er interessant", q: "øvelserne er udfordrende", r: "kurset er en fornøjelse", skriv følgende udsagn symbolsk:

a) stoffet er interessant og øvelserne er udfordrende;

b) stoffet er uinteressant, øvelserne er ikke udfordrende, og kurset er ikke en fornøjelse;

(c) hvis stoffet ikke er interessant og øvelserne ikke udfordrende, så er kurset ikke en fornøjelse;

(d) at stoffet er interessant betyder, at øvelserne er udfordrende, og omvendt;

(e) enten er stoffet interessant, eller øvelserne er ingen udfordring, men ikke begge dele.

Opgave 3 Find sandhedstabellerne for følgende udsagn:

(a) $p \Rightarrow p$

(b) $(p \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow \neg p)$

(c) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow \neg p)$

(d) $(p \vee \neg q) \vee \neg p$

(e) $(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg p$

(f) $(p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

(g) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Opgave 4 I et bestemt land taler folk enten altid sandt eller altid usandt. En turist kommer til et vej-Y, hvor den ene vej fører til hovedstaden, og den anden gør ikke. En indbygger står på stedet. Hvilket spørgsmål skal turisten stille for at få oplyst vejen til hovedstaden?

Opgave 5 Omskriv følgende citater til symbolsprog, og beregn negationerne. Omskriv igen negationen til almindeligt sprog.

(a) Det er aldrig overskyet hele dagen;

(b) Mennesket lever ikke af brød alene;

(c) Solen går aldrig ned over det britiske rige;

(d) Enhver ting har sin tid, og der er et tidspunkt for ethvert forehavende.

Opgave 6 Som i foregående opgave:

(a) Ethvert positivt heltal har en entydig primfaktoropløsning;

(b) det eneste hele primtal er 2;

(c) multiplikation af hele tal er associativ;

(d) to punkter i planen bestemmer en linie;

(e) en trekants højder skærer i et punkt;

(f) for en linie i planen og et punkt uden for denne, findes en entydig linie gennem punktet parallel med den givne linie.

Opgave 7 Lad $U \subseteq \mathbb{R}$ være en mængde, $f\colon U \to \mathbb{R}$ en funktion, og antag, at der findes en konstant $k \geq 0$, således at

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{for alle } x, y \in U.$$

Vis, at f er uniformt kontinuert på U.

Opgave 8 Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åbent interval og $f\colon I \to \mathbb{R}$ en differentiabel funktion med begrænset differentialkvotient. Vis, at f er uniformt kontinuert. (Vink: Benyt middelværdisætningen og opgave 7.)

Opgave 9
Lad (X, d) være et metrisk rum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ og $g\colon X \to \mathbb{R}$ funktioner og $\alpha \in \mathbb{R}$. Vi definerer funktionerne $f + g$, αf og fg ved

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \quad \text{for alle } x \in X && (1)\\ (\alpha f)(x) &= \alpha f(x) \quad \text{for alle } x \in X && (2)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x) \quad \text{for alle } x \in X. && (3) \end{aligned}$$

Lad $x_0 \in X$ og antag, at både f og g er kontinuerte i x_0.

1. Vis, at $f + g$ og αf er kontinuerte i x_0.

2. Vis ved hjælp af trekantsuligheden, at hvis $x \in X$ er vilkårligt, så gælder

$$|f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)| \leq |g(x)||f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)||g(x) - g(x_0)|. \qquad (4)$$

3. Benyt 2. til at vise, at fg er kontinuert i x_0.

Opgave 10
Lad (X, τ) være et topologisk rum, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ funktioner.

1. Generaliser opgave 9 fra metriske rum til topologiske rum.
2. Antag, at g er kontinuert i $x_0 \in X$ og $g(x) \neq 0$ for alle $x \in X$. Definer $\frac{1}{g}\colon X \to \mathbb{R}$ ved
$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} \qquad \text{for alle } x \in X. \tag{5}$$
Vis, at $\frac{1}{g}$ er kontinuert i x_0. (Vink: Sæt på fælles brøkstreg!)
3. Antag yderligere, at f er kontinuert i x_0. Vis, at $\frac{f}{g}$ er kontinuert i x_0.

Opgave 11
Lad $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være mængden
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2 \quad \text{og} \quad 0 < x < 5\}.$$

1. Skitser A på en tegning.
2. Vis, at A er åben. (Vink: Man kan f.eks. vise, at der findes en passende kontinuert funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og åbne mængder $B \subseteq \mathbb{R}$ og $C \subseteq \mathbb{R}^2$, så
$$A = f^{-1}(B) \cap C.$$
Man kan også argumentere ved hjælp af tegningen.)
3. Find randpunkterne for A.

Opgave 12
Betragt mængden $E \subseteq \mathbb{R}^2$ givet ved
$$E = \left\{ \left(x, \frac{1}{\cos x}\right) \mid x > 0 \right\}.$$

1. Skitser E på en tegning og sammenlign jeres tegning med side 51 i bogen (tegn først selv!).
2. Find randpunkterne for E.

Opgave 13

Lad $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ være en følge med $a_n \leq a_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis følgende:

(i) Hvis (a_n) er opadtil begrænset, så vil $a_n \to \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Hvis (a_n) ikke er opadtil begrænset, så vil $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$.

Det har derfor mening for en voksende følge (a_n) at skrive $\lim_n a_n < \infty$ for at betegne, at følgen er konvergent i $\mathbb{R}^n$.

Opgave 14

Lad $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ og sæt $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$. Vi siger, at den uendelige række $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, hvis følgen (s_k) er konvergent. s_k kaldes den k'te afsnitsum for $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kaldes absolut konvergent, hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ er konvergent.

Vis, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolut konvergent, så er den konvergent. (Vink: Vis, at (s_k) er en Cauchyfølge)

Opgave 15

Lad $0 < p < 1$ og definer $f \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ ved:

$$f(x) = x^p \quad \text{for alle } x \geq 0.$$

Vis at f er uniformt kontinuert.

(Vink: Betragt intervallerne $[0, 1]$ og $[1, \infty][$ hver for sig. På $[1, \infty[$ kan middelværdisætningen benyttes.)

Opgave 16 (Sammenligningskriteriet for rækker)

1. Lad $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ således at $0 \leq a_n \leq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

2. Lad $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$, således at $|a_n| \leq b_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis, at hvis $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent, så er $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent og dermed konvergent.

Opgave 17 (kvotientkriteriet)

1. Lad $a_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og antag, at der findes et $0 < q < 1$ og et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{for alle } n \geq n_0. \tag{6}$$
   - Vis, at $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} q^k$ for alle $k \geq 0$.
   - Vis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent.

2. Lad $a_n > 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$, således at $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$. Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er konvergent.

Opgave 18 (Rodkriteriet)

1. Lad $a_n \geq 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og antag, at $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Vis, at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent. (Vink: Find en passende kvotientrække, som er en majorantrække for en "halerække" af $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$).

2. Bestem de $x \in \mathbb{R}$, for hvilke rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ er absolut konvergent. (Vink: Benyt rodkriteriet. Der må benyttes (vises senere), at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ er divergent).