Et specialtilfælde at Noternes Sætning 2.2.

I denne note vil vi benytte samme notation som i noterne. Vi lader $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ være en åben mængde, $\boldsymbol{f}\colon B \to \mathbb{R}^n$ og $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in B$. Vi betragter differentialligningen

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)) \tag{1}$$

i et interval omkring t_0 med sidebetingelsen

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2}$$

Vi vil her behandle det tilfælde, hvor $B = \mathbb{R}^{n+1}$ og $\boldsymbol{f}$ tilfredsstiller en lidt anden betingelse end den, som er angivet i Sætning 2.2. Det er teknisk lidt lettere og mere overskueligt.

Sætning 1 *Lad $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ være kontinuert og antag, at der findes en konstant $K > 0$, således at*

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{z}_2)\|_1 \leq K\|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|_1 \tag{3}$$

for alle $t \in \mathbb{R}$ og alle $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{R}^n$.

Da har (1) en entydigt bestemt løsning $\boldsymbol{x}$ i et interval om t_0 med $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$.

Bevis: Lad r være valgt, så $0 < r < \frac{1}{K}$ og betragt rummet $C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$, som udstyret med normen defineret i noterne side 6, er et Banachrum (og dermed et fuldstændigt metrisk rum).

For ethvert $\boldsymbol{x} \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$ sætter vi

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{x})(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t))\, dt \tag{4}$$

Det er klart, at for alle $\boldsymbol{x} \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$ er $\mathcal{A}\boldsymbol{x}$ en differentiabel funktion og dermed specielt $\mathcal{A}\boldsymbol{x} \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$. Noternes Sublemma 2 giver desuden, at $\boldsymbol{x}$ er en løsning til (1) med sidebetingelsen (2), hvis og kun hvis $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Lad os vise, at $\mathcal{A}$ er en kontraktion på $C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$.

Dertil lader vi $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$ og $t \in [t_0, t_0 + r]$ være vilkårlige og får:

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}\boldsymbol{x}_1)(t) - (\mathcal{A}\boldsymbol{x}_2)(t)\|_1 = \| \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_2(s))] \, ds\|_1 = \\
\sum_{j=1}^{n} | \int_{t_0}^{t} [f_j(s, \boldsymbol{x}_1(s)) - f_j(s, \boldsymbol{x}_2(s))] \, ds \; | \leq \\
\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} |f_j(s, \boldsymbol{x}_1(s)) - f_j(s, \boldsymbol{x}_2(s))| \, ds = \\
\int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_2(s)\|_1 \, ds \leq \\
K \int_{t_0}^{t} \|\boldsymbol{x}_1(s) - \boldsymbol{x}_2(s)\|_1 \, ds \leq (t - t_0) K \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty \leq \\
Kr\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

hvor f_j ligesom i noterne betegner koordinatfunktionerne for $\boldsymbol{f}$. Vi får klart en tilsvarende ulighed for $t \in [t_0 - r, t_0]$. (5) viser nu, at

$$
\|\mathcal{A}\boldsymbol{x}_1 - \mathcal{A}\boldsymbol{x}_2\|_\infty \leq Kr\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|_\infty \tag{6}
$$

Da $Kr < 1$ viser (6), at $\mathcal{A}$ er en kontraktion med kontraktionsfaktor Kr . Banachs fixpunktssætning giver nu, at $\mathcal{A}$ har et entydigt bestemt fixpunkt $\boldsymbol{x} \in C([t_0 - r, t_0 + r], \mathbb{R}^n)$. Vi har dermed fundet en løsning til (1). Entydigheden kan indses således:

Antag, at (1) har en løsning $\boldsymbol{y}$ på et interval $[t_0 - r_1, t_0 + r_1]$ med $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$. Hvis $r_2 = \min(r, r_1)$, så er $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in C([t_0 - r_2, t_0 + r_2], \mathbb{R}^n)$, men da $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ og $\mathcal{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ på $[t_0 - r_2, t_0 + r_2]$ og $\mathcal{A}$ er en kontraktion på $C([t_0 - r_2, t_0 + r_2], \mathbb{R}^n)$, giver entydigheden af fixpunkter, at

$$
\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t) \quad \text{for alle } t \text{ med } |t - t_0| \leq r_2
$$

$\square$