1 Indre produkt og metrik

Definition 1.1 *Lad H være et komplekst vektorrum. En funktion $(\cdot,\cdot)\colon H\times H\to\mathbb{C}$ kaldes et indre produkt, hvis*

$$
\begin{aligned}
\forall x,y\in H\colon (x,y) &= \overline{(y,x)} && (1.1)\\
\forall x,y,z\in H\colon (tx+y,z) &= t(x,z)+(y,z) && (1.2)\\
\forall x\in H\colon (x,x) &\geq 0 && (1.3)\\
(x,x)=0 \implies x &= 0. && (1.4)
\end{aligned}
$$

Bemærkning: Hvis H er et reelt vektorrum skal $(x,y)\in\mathbb{R}$ for alle $x,y\in H$, og (1.1) får i dette tilfælde udseendet

$$\forall x,y\in H\colon (x,y)=(y,x). \tag{1.5}$$

Hvis H er et vektorrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$, så sætter vi $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ for alle $x\in H$. Bemærk at $\|x\|\geq 0$ for alle $x\in H$ og at $\|x\|=0$ medfører at $x=0$.

Vi vil nu vise

Sætning 1.2 *(Cauchy-Schwartz' ulighed) Lad H være et vektorrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$, Da gælder:*

$$|(x,y)|\leq \|x\|\|y\| \quad \textit{for alle } x\in H. \tag{1.6}$$

Bevis: Lad $t\in\mathbb{R}$, $x\in H$ og $y\in H$ være vilkårlige. Vi har da

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (tx+y,tx+y)=t^2\|x\|^2+t(x,y)+t(y,x)+\|y\|^2 && (1.7)\\
&= t^2\|x\|^2+t[(x,y)+\overline{(x,y)}]+\|y\|^2\\
&= \|x\|^2t^2+2\mathrm{Re}(x,y)t+\|y\|^2.
\end{aligned}
$$

Sæt nu $p(t)=\|x\|^2t^2+2\mathrm{Re}(x,y)t+\|y\|^2$ for all $t\in\mathbb{R}$. p er da et 2. grads polynomium, som ifølge (1.7) opfylder at $p(t)\geq 0$ for alle $t\in\mathbb{R}$. p har derfor højst én reel rod, hvilket medfører at der om diskriminanten D for p gælder, at $D\leq 0$. Vi finder

$$0\geq D=4[\mathrm{Re}(x,y)]^2-4\|x\|^2\|y\|^2. \tag{1.8}$$

Ved division med 4 og uddragning af kvadratrod giver dette

$$|\mathrm{Re}(x,y)|\leq\|x\|\|y\|. \tag{1.9}$$

Hvis H er et reelt vektorrum, er (1.9) det samme som (1.6), og vi er færdige i dette tilfælde. Hvis H er komplekst, fortsætter vi på følgende vis:

Sæt $\alpha=\frac{|(x,y)|}{(x,y)}$, hvis $(x,y)\neq 0$ og $\alpha=1$, hvis $(x,y)=0$. Da $|\alpha|=1$ og $|(x,y)|\geq 0$, giver (1.9):

$$|(x,y)|=\alpha(x,y)=(\alpha x,y)=\mathrm{Re}(\alpha x,y)\leq\|\alpha x\|\|y\|=|\alpha|\|x\|\|y\|=\|x\|\|y\|, \tag{1.10}$$

hvilket netop er (1.6). q.e.d.

Bemærkning: I Matematik B er der givet et andet bevis for Cauchy-Schwartz' ulighed.

Vi får også brug for

Sætning 1.3 *(Trekantsuligheden) Lad H og $(\cdot,\cdot)$ være som i sætning 1.2. Da gælder*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \textit{for alle } x, y \in H. \tag{1.11}$$

Bevis: Ved benyttelse af Cauchy-Schwartz' ulighed fås:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(x,y) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

og dermed

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

q.e.d.

Sætning 1.4 *Lad H og $(\cdot,\cdot)$ være som i Sætning 1.2. For alle $x, y \in H$ sætter vi $d(x,y) = \|x-y\|$. d er da en metrik på H.*

Bevis: Lad $x, y, z \in H$ være vilkårlige. Da er $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$. Hvis $d(x,y) = 0$, så er $\|x-y\| = 0$, og dermed er $x = y$. MET1 gælder altså. At MET2 gælder, følger af

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = d(y,x). \tag{1.13}$$

Trekantsuligheden ses således:

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z). \tag{1.14}$$

q.e.d.

Eksempel: (= Eksempel 2.4 i bogen). Vi betragter $H = \mathbb{R}^n$. Vi har da et reelt vektorrum, som har følgende indre produkt (også kaldet prikproduktet)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{for alle } x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ og } y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1.15}$$

Den tilhørende norm bliver for $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.16}$$

Hvis $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, så er afstanden d fra Sætning 1.4 givet ved

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{1.17}$$

d givet ved (1.17) er en metrik på $\mathbb{R}^n$ ifølge Sætning 1.4. Vi ser, at d er den sædvanlige Euklidiske afstand mellem punkter i $\mathbb{R}^n$.

Et andet bevis for lærebogens sætning 12.2

(2) $\implies$ (1):
Lad $K \subseteq S$ være følgekompakt og lad $\{U_i \mid i \in I\}$ være en vilkårlig åben overdækning. Vi skal (for at vise kompaktheden af K) vise, at den kan udtyndes til en endelig overdækning. Vi viser først

Påstand 1
Der vindes et $r > 0$, så der for alle $x \in k$ findes et $i \in I$, så $B_r(x) \subseteq U_i$.

Bevis for denne påstand
For ethvert $n \in \mathbb{N}$ sætter vi

$$A_n = \{x \in k \mid B_{1/n}(x) \backslash U_i \neq \emptyset \quad \text{for alle } i \in I\} \tag{1}$$

Påstand a
Der findes et $m \in \mathbb{N}$, så $A_m = \emptyset$.

Vi bemærker, at hvis (a) er vist, så kan vi benytte $r = \frac{1}{m}$ i Påstand 1.

Bevis for (a)
Antag, at (a) ikke gælder, dvs at $A_n \neq \emptyset$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi kan da finde et $x_n \in A_n$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$. Da K er følgekompakt, findes der ifølge sætning 10.6 en delfølge (x_{n_k}) og et punkt $x_0 \in K$, så $x_{n_k} \to x_0$ (bemærk, at det ikke er nødvendigt at filosofere over, om (x_n) består af uendeligt mange elementer eller ej!) Da $x_0 \in K$, findes et $i_0 \in I$, så $x_0 \in U_{i_0}$, og da U_{i_0} er åben, findes et $r_0 > 0$, så $B_{r_0}(x_0) \subseteq U_{i_0}$. Lad k_0' være bestemt, så $\frac{1}{n_{k_0'}} \leq \frac{r_0}{2}$. Da $x_{n_k} \to x_0$, kan vi finde et k_0'', så $x_{n_k} \in B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)$ for alle $k \geq k_0''$. Sæt nu $k = \max(k_0', k_0'')$. Hvis $y \in B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k})$, så vil

$$d(y, x_0) \leq d(y, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \frac{r_0}{2} \leq \frac{r_0}{2} + \frac{r_0}{2} = r_0 \tag{2}$$

hvilket viser, at $y \in B_{r_0}(x_0)$. Vi har dermed vist, at

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_{r_0}(x_0) \subseteq U_{i_0}, \tag{3}$$

som er i modstrid med, at $x_{n_k} \in A_{n_k}$. q.e.d.