Supplerende noter II til MM04

N.J. Nielsen

1 Uniform konvergens af følger af funktioner

Vi starter med følgende definition:

Definition 1.1 *Lad S være en vilkårlig mængde og (X,d) et metrisk rum. En følge (f_n) af funktioner fra S til X siges at konvergere uniformt mod en funktion $f : S \to X$, hvis der gælder:*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall s \in S \; \forall n \geq n_0 : d(f(s), f_n(s)) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Bemærk, at det er det samme n_0, som kan bruges for alle $s \in S$, hvilket gør uniform konvergens betydeligt stærkere end blot at kræve, at $f_n(s) \to f(s)$ for alle $s \in S$ (punktvis konvergens).

I det følgende lader vi S betegne et topologisk rum og (X,d) et metrisk rum.

Den første sætning giver, at kontinuitet bibeholdes under uniform konvergens.

Sætning 1.2 *Hvis (f_n) er en følge af kontinuerte funktioner fra S til X, som konvergerer uniformt mod en funktion $f : S \to X$, så er f kontinuert.*

Bevis: Lad $s_0 \in S$ være et vilkårligt punkt; vi skal vise, at f er kontinuert i s_0. Lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt. Da (f_n) går mod f uniformt, kan vi finde et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at

$$d(f(s), f_n(s)) < \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq n_0 \text{ og alle } s \in S. \tag{1.2}$$

Da f_{n_0} er kontinuert i s_0, kan vi finde en omegn V om s_0, således at:

$$d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(s_0)) < \varepsilon \qquad \text{for alle } s \in V. \tag{1.3}$$

For vilkårlige $s \in V$ finder vi, at

$$d(f(s), f(s_0)) \leq d(f(s), f_{n_0}(s)) + d(f_{n_0}(s), f_{n_0}(s_0)) + d(f_{n_0}(s_0), f(s_0)) < 3\varepsilon, \tag{1.4}$$

hvor det første og det sidste led vurderes ved hjælp af (1.2), medens det midterste led vurderes ved (1.3).

Da ε var vilkårlig viser (1.4), at f er kontinuert i s_0. $\square$

Hvis S er kompakt, er uniform konvergens det samme som konvergens i rummet $C(S, X)$, hvilket den næste sætning viser.

Sætning 1.3 *Hvis S er kompakt, $(f_n) \subseteq C(S, X)$ og $f \in C(S, X)$, så er følgende udsagn ækvivalente:*

(i) $f_n \to f$ *i* $C(S, X)$

(ii) (f_n) *konvergerer uniformt mod* f.

Bevis:

Lad først (i) gælde og lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt. Da $d_\infty(f_n, f) \to 0$ for $n \to \infty$, kan vi finde et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at

$$d_\infty(f_n, f) < \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq n_0. \tag{1.5}$$

Sammen med definitionen på d_∞ giver (1.5), at

$$d(f_n(s), f(s)) \leq d_\infty(f_n, f) < \varepsilon \qquad \text{for alle } s \in S \text{ og alle } n \geq n_0, \tag{1.6}$$

hvilket viser, at (f_n) går mod f uniformt.

Lad os nu antage, at (ii) gælder og lad $\varepsilon > 0$ være vilkårligt. Vi kan da finde et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at

$$d(f(s), f_n(s)) < \varepsilon \qquad \text{for alle } s \in S \text{ og alle } n \geq n_0, \tag{1.7}$$

som medfører, at

$$d_\infty(f_n, f) = \sup\{d(f_n(s), f(s)) \mid s \in S\} \leq \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq n_0. \tag{1.8}$$

Dette viser, at $d_\infty(f_n, f) \to 0$ for $n \to \infty$. $\square$

Lad nu (f_n) være en følge af funktioner fra S til $\mathbb{C}$ og sæt $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ for alle $x \in S$. Vi siger, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer *punktvist*, hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent for ethvert $x \in S$ (d.v.s., at følgen $(s_n(x))$ er konvergent for ethvert $x \in S$). Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ siges at konvergere *uniformt*, hvis følgen (s_n) er uniformt konvergent.

Den sidste sætning i dette afsnit giver et kriterium for uniform konvergens af en række af funktioner.

Sætning 1.4 *(***Weierstrass' M–test***)*

Lad (f_n) være en følge af funktioner fra S til $\mathbb{C}$ og lad $(M_n) \subseteq \mathbb{R}_+$, således at

(i) $|f_n(x)| \leq M_n$ *for alle* $x \in S$ *og alle* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *er konvergent.*

Da vil rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergere uniformt og absolut på S.

Bevis: Lad os først vise, at rækken konvergerer absolut, d.v.s. vi skal vise, at $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ er konvergent for ethvert $x \in S$. Dette følger imidlertid direkte af (i) og (ii) og sammenligningskriteriet for rækker (se opgave 16 i de udleverede opgaver). Det følger derefter af opgave 15 i samme sæt, at også rækken $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ er konvergent for ethvert $x \in S$. Vi sætter nu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \text{for alle } x \in S \tag{1.9}$$

Vi vil vise, at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergerer uniformt mod f, så lad dertil $\varepsilon > 0$ være vilkårligt. Da (ii) gælder, kan vi finde et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at $\sum_{n=n_0}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Med dette valg af n_0 finder vi, at der for alle $n \geq n_0$ og alle $x \in S$ gælder:

$$\begin{aligned} |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| &= |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon \end{aligned} \tag{1.10}$$

(1.10) viser, at følgen $(\sum_{k=1}^{n} f_k)$ konvergerer uniformt mod f. □

2 Addendum til beviset for noternes Lemma 5.1

Vi vil bruge samme notation som i noterne. Beviset for Lemma 5.1 giver, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$ konvergerer uniformt for $x \in [-1, 1]$ mod en funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Sætning 1.2 giver, at f er kontinuert. Vi mangler at vise, at $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ for alle $x \in [-1, 1]$. Vi viser først, at $f(x) = (1 + x)^{1/2}$ for alle $x \in]-1, 1[$. En sætning om potensrækker, som vi ikke vil vise her, giver, at f er differentiabel i $]-1, 1[$, og differentialkvotienten fås ved at differentiere rækken ledvist. For ethvert $n \geq 0$ gælder der:

$$\frac{\binom{1/2}{n+1}}{\binom{1/2}{n}} = \frac{1/2 - n}{n + 1},$$

således at vi har:

$$1/2\binom{1/2}{n} = (n+1)\binom{1/2}{n+1} + n\binom{1/2}{n}. \tag{2.1}$$

Lad nu $x \in]-1,1[$ vaere vilkårlig. Ved differentiation finder vi:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{1/2}{n} x^{n-1} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \binom{1/2}{n+1} x^n = \tag{2.2}$$
$$1/2 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{1/2}{n} x^{n-1} \quad = \quad 1/2 f(x) - x f'(x),$$

eller med andre ord at f opfylder differentialligningen:

$$f'(x) = \frac{1}{2(1+x)} f(x) \qquad \text{for alle } x \in]-1,1[\tag{2.3}$$

Det ses umiddelbart, at funktionen $(1+x)^{1/2}$ er løsning til denne ligning, og da $f(0) = 1$, fås af entydighedssætningen for løsninger til differentialligninger (det er faktisk MAT A stof, men sætningen i vore noter kan naturligvis også benyttes!), at $f(x) = (1+x)^{1/2}$ for alle $x \in]-1,1[$. Da begge funktioner er kontinuerte, er mængden $A = \{x \in [-1,1] \mid f(x) - (1+x)^{1/2} = 0\}$ en lukket delmængde af intervallet $[-1,1]$. Da $]-1,1[\subseteq A$, må $A = [-1,1]$. Vi har dermed vist, at $f(x) = (1+x)^{1/2}$ for alle $x \in [-1,1]$ $\square$

3 Bemærkninger til noternes Eksempel 5.10

Vi kan formulere konklusionen i eksemplet i følgende sætning:

Sætning 3.1 *Lad $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, og lad $\mathcal{A}$ være delalgebraen af $C(S,\mathbb{C})$ bestående af alle polynomier i den variable z. Hvis $f \in C(S,\mathbb{C})$ er defineret ved $f(z) = \overline{z}$ for alle $z \in S$, så vil $f \notin \overline{\mathcal{A}}$. $\mathcal{A}$ er altså ikke tæt i $C(S,\mathbb{C})$ til trods for, at den indeholder de konstante funktioner og separerer punkter i S.*

Bevis: Lad of antage, at $f \in \overline{\mathcal{A}}$. Vi kan da finde et polynomium P, således at

$$|\overline{z} - P(z)| < 1/2 \qquad \text{for alle } z \in S. \tag{3.1}$$

Hvis n er graden af polynomiet, så har P formen

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{for alle } z \in S, \tag{3.2}$$

hvor $\{a_0, a_2, , \cdots, a_n\} \subseteq \mathbb{C}$

Hvis $0 \leq t \leq 2\pi$, sætter vi $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Der gælder da, at $|e^{it}| = 1$, $e^{-it} = \overline{e^{it}}$ og $(e^{it})^k = e^{ikt}$ (den sidste ligning vises ved induktion og benyttelse af additionsformlerne for $\cos$ og $\sin$).

Indsætter vi $z = e^{it}$ i (3.1), fås:

$$|e^{-it} - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}| < 1/2 \qquad \text{for alle } t \in [0, 2\pi]. \tag{3.3}$$

Ved multiplikation af denne ligning med $|e^{it}| = 1$, finder vi at:

$$|1 - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{it(k+1)}| < 1/2 \qquad \text{for alle } t \in [0, 2\pi]. \tag{3.4}$$

Det følger umiddelbart af definitionen, at $\int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = 0$ for alle hele tal k med $k \neq 0$. Ved benyttelse af dette får vi ved integration af (3.4):

$$2\pi = |\int_0^{2\pi} (1 - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i(k+1)t}) dt| \leq \int_0^{2\pi} |1 - \sum_{k=0}^{n} a_k e^{i(k+1)t}| dt < \pi, \tag{3.5}$$

hvilket klart er en modstrid. $\square$