Foldningsintegraler og Doobs martingale ulighed

N.J. Nielsen

Indledning

I dette notat vil vi vise en sætning om foldningsintegraler, som blev benyttet trin 2 i konstruktionen af Itointegralet, gennemgå eksempel 3.1.9 hos Øksendal og give er bevis for Doobs martingale ulighed.

1 Nogle foldningsintegraler

Dette er kun medtaget, hvis nogle af jer er interesserede i at se, hvordan man får integraludtrykket i trin 2 af konstruktionen af Itointegralet til at konvergere mod h.

Lad $T > 0$ og lad (ψ_n) være en følge af ikke–negative kontinuerte funktioner på $\mathbb{R}$, som opfylder:

(i) $\psi_n(x) = 0$ for alle $x \leq -n^{-1}$ og alle $x \geq 0$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemærk, at da ψ_n er kontinuert og lig 0 udenfor det kompakte interval $[-n^{-1}, 0]$, er ψ_n en begrænset funktion. For ethvert $f \in L_1([0,T])$ har følgende integral derfor mening:

$$(f * \psi_n)(t) = \int_0^t f(s)\psi_n(s-t)ds \quad \text{for alle } t \in [0,T] \text{ og alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Integraler af formen (1.1) kaldes foldningsintegraler og spiller en stor rolle i matematisk analyse. I forelæsningerne lod vi konkret grafen for ψ_n være benene i en ligebenet trekant med grundlinie $[-n^{-1}, 0]$ og højde $2n$.

I det følgende får vi ofte brug for at substituere i integraler af formen (1.1), og det er derfor praktisk at udvide en funktion $f \in L_1([0,T])$ til $]-\infty, T]$ ved at sætte $f(s) = 0$ for alle $s < 0$. Med denne konvention kan (1.1) skrives:

$$(f * \psi_n)(t) = \int_{t-\frac{1}{n}}^t f(s)\psi_n(s-t)ds \quad \text{for alle } t \in [0,T] \text{ og alle } n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Vi får brug for følgende to lemmaer:

Lemma 1.1 *Hvis* $1 \leq p < \infty$, $f \in L_p([0,T])$ *og* $n \in \mathbb{N}$, *vil* $f * \psi_n \in L_p([0,T])$ *med* $\|f * \psi_n\|_p \leq \|f\|_p$.

Bevis: Vi sætter $f(s) = 0$ for alle $s < 0$ og fastholder et $t \in [0,T]$. Da $\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \psi_n(s-t)ds = 1$, er målet defineret ved $d\mu = \psi_n(s-t)ds$ et sandsynlighedsmål, og Jensens ulighed giver derfor:

$$|(f * \psi_n)(t)|^p \leq \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} |f(s)|^p \psi_n(s-t)ds \leq \int_0^t |f(s)|^p \psi_n(s-t)ds. \tag{1.3}$$

Hvis vi integrerer (1.3) fra 0 til T og bruger Fubinis sætning, får vi, at

$$\int_0^T |(f * \psi_n)(t)|^p dt \leq \int_0^T \int_0^t |f(s)|^p \psi_n(s-t)dsdt = \int_0^T |f(s)|^p \int_s^T \psi_n(s-t)dtds \leq \int_0^T |f(s)|^p ds. \tag{1.4}$$

Dette viser påstanden. □

Lemma 1.2 *Lad* $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ *være kontinuert med* $g(0) = 0$. *Da gælder*

(i) $(g * \psi_n)(t) \to g(t)$ *uniformt for* $t \in [0,T]$.

(ii) $g * \psi_n \to g$ *i* $L_p([0,T])$ *for alle* $1 \leq p < \infty$.

Bevis: Som ovenfor udvider vi g til $]-\infty, T]$ ved at sætte $g(t) = 0$ for alle $t < 0$. Da $g(0) = 0$, er også det udvidede g kontinuert. For at vise (i) lader vi $\varepsilon > 0$. Da g er uniformt kontinuert, findes der et $\delta > 0$, således at

$$|t - s| \leq \delta \Rightarrow |g(t) - g(s)| \leq \varepsilon \quad \text{for alle } s, t \in]-\infty, T].$$

Lad nu n_0 være bestemt, så $n_0^{-1} \leq \delta$, og lad $t \in [0,T]$ og $n \geq n_0$ være vilkårlige. Da
$\int_{t-\frac{1}{n}}^{t}$
$psi_n(s-t)ds = 1$, vil

$$(g \star \psi_n)(t) - g(t) = \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} (g(s) - g(t))\psi_n(s-t)ds,$$

således at

$$\begin{aligned} |(g \star \psi_n)(t) - g(t)| &\leq \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} |g(t) - g(s)|\psi_n(s-t)ds \leq \\ \varepsilon \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} \psi(s-t)ds &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dette viser den uniforme konvergens.

Lad nu $1 \leq p < \infty$. For at vise (ii) bemærker vi, at (i) giver, at $|(g \star \psi_n)(t) - g(t)|^p \to 0$ uniformt for $t \in [0, T]$, hvilket giver, at

$$\|g * \psi_n - g\|_p^p = \int_0^T |(g * \psi_n)(t) - g(t)|^p dt \to 0,$$

således at $g \star \psi_n \to g$ i $L_p([0, T])$. Man kan naturligvis også bruge den punktvise konvergens fra (i) sammen med majoriseret konvergens. $\square$

Vi kan nu vise den sætning, som vi bruger i trin 2 i konstruktionen af Itointegralet hos Øksendal (tilfældet $p = 2$).

Sætning 1.3 *Lad* $1 \leq p < \infty$. *Hvis* $f \in L_p([0, T])$, *så vil* $f * \psi_n \to f$ *i* $L_p([0, T])$ *for* $n \to \infty$.

Bevis: Lad $f \in L_p([0, T])$ og $\varepsilon > 0$ være vilkårlige. Da mængden af reelle kontinuerte funktioner med kompakt støtte i $]0, T[$ er tæt i $L_p([0, T])$, kan vi finde en kontinurt funktion $g : [0, T] \to \mathbb{R}$ med $g(0) = 0$, så $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ifølge Lemma 1.2 kan vi finde et $n_0 \in \mathbb{N}$, således at $\|g * \psi_n - g\|_p \leq \varepsilon$ for alle $n \geq n_0$. Hvis $n \geq n_0$, giver Lemma 1.1 og trekantsuligheden, at

$$\begin{aligned} \|f * \psi_n\|_p &\leq \|(f - g) * \psi_n\|_p + \|g * \psi_n - g\|_p + \|g - f\|_p \leq \\ 2\|f - g\|_p + \varepsilon &\leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Dette viser påstanden. $\square$

2 Øksendals Eksempel 3.1.9

Vi vil her vise følgende sætning:

Sætning 2.1 *Hvis* $t \geq 0$ *så vil* $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$

Bevis: Lad for ethvert $n \in \mathbb{N}$ (t_k^n) være den sædvanlige inddeling af intervallet fra $[0, t]$ og definer elementarfunktionen ϕ_n ved

$$\phi_n(s, \omega) = \sum_{k \geq 0} B_{t_k}(\omega) 1_{[t_k^n, t_{k+1}^n[}(s) \quad \text{for alle } 0 \leq s \text{ og alle } \omega \in \Omega.$$

Vi ønsker at vise, at $\phi_n \to B$ i $L_2([0,t] \times \Omega)$. Lad $\varepsilon > 0$ og bestem $n_0 \in \mathbb{N}$, så $2^{-n_0} \leq \varepsilon$. For alle $n \geq n_0$ finder vi:

$$\begin{aligned}
E(\int_0^t (B_s - \phi_n)^2 ds &= \sum_{k\geq 0} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (B_s - B_{t_k^n})^2 = \\
\sum_{k\geq 0} \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (s - t_k^n) ds &= \frac{1}{2} \sum_{k\geq 0} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq \\
\frac{1}{2}\varepsilon \sum_{kge0} (t_{k+1}^n - t_k^n) &= \frac{1}{2}\varepsilon t,
\end{aligned}$$

hvilket viser påstanden. Øksendals Korollar 3.1.8 giver nu, at

$$\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t \phi_n dB = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq 0} B_{t_k^n}(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}),$$

hvor konvergensen er i $L_2(P)$.

Hvis $0 \leq u < v$ finder vi:

$$B_v^2 = (B_u + (B_v - B_u))^2 = (B_v - B_u)^2 + B_u^2 + 2B_u(b_v - B_u), \tag{2.1}$$

hvilket giver:

$$B_t^2 = \sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}^n}^2 - B_{t_k^n}^2) = \sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 + 2 \sum_{k\geq 0} B_{t_k^n}(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}),$$

således at

$$\int_0^t \phi_n dB = \frac{1}{2}(B_t^2 - \sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2).$$

For at vise påstanden, skal vi derfor vise, at

$$\sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 \to t \quad \text{for } n \to \infty, \tag{2.2}$$

hvor konvergensen er i $L_2(P)$. Idet vi et øjeblik undlader at skrive indekset n, finder vi

$$\begin{aligned}
E((\sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 - t)^2 &= E(\sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)^2 + t^2 + 2t \sum_{k\geq 0} E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = \\
E(\sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)^2 - t^2. & \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Vi skal altså vurdere første led efter sidste lighedstegn i (2.3). I første omgang får vi:

$$E(\sum_{k\geq 0} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2)^2 = \sum_{k,j} E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2. \tag{2.4}$$

Hvis $j < k$, er $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2$ uafhængig af $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2$, så

$$E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = (t_{j+1} - t_j)(t_{k+1} - t_k),$$

og derfor er

$$\sum_{k \neq j} E(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 = \sum_{k \neq j}(t_{j+1} - t_j)(t_{k+1} - t_k) < t^2. \tag{2.5}$$

For $k = j$ finder vi:

$$\sum_{k \geq 0} E(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^4 = 3\sum_{k \geq 0}(t_{k+1} - t_k)^2, \tag{2.6}$$

hvor vi har benyttet, at hvis en stokastisk variabel X er normaltfordelt $N(0, \sigma^2)$, så er $EX^4 = 3\sigma^4$ (se Opgave 8 i Opgavehæftet for Sandsynlighedsteori I).

Sammenfatter vi nu (2.3)–(2.6), finder vi, at

$$E(\sum_{k \geq 0}(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k})^2 - t)^2 \leq 3\sum_{k \geq 0}(t^n_{k+1} - t^n_k)^2. \tag{2.7}$$

I første del af beviset viste vi, at højresiden af (2.7) går mod 0, når $n \to \infty$, hvormed vi har vist det ønskede. $\square$

Når vi har lært Itos formel, får vi en lettere måde at regne Itointegraler ud på. Det ovenstå ende svarer jo til, at vi regnede alle Riemannintegraler ud ved hjælp af middelsummer.

3 Doobs martingale ulighed

Vi skal i dette afsnit vise Doobs martingale ulighed, som udsiger:

Sætning 3.1 *Lad (M_t) være en martingale relativ til filtreringen $(\mathcal{M}_t)$ af $\mathcal{F}$, således at funktionen $t \to M_t(\omega)$ er kontinuert for n.a. $\omega \in \Omega$. For ethvert $1 \leq p < \infty$, ethvert $T \geq 0$ og ethvert $\lambda > 0$ gælder der*

$$P(\sup_{t \in [0,T]} |M_t| \geq \lambda) \leq \lambda^{-p} E(|M_T|^p)$$

Bevis: Vi lader $1 \leq p < \infty$, $\lambda > 0$ og $T \geq 0$ være vilkårlige. Vi forudsætter desuden, at $M_T \in L_p(P)$, thi ellers står der jo ∞ på højresiden af uligheden, så den bliver triviel. Af tekniske grunde vil vi først vise

$$P(\sup_{t \in [0,T]} |M_t| > \lambda) \leq \lambda^{-p} E(M_T|^p) \tag{3.1}$$

Beviset for (3.1) falder i tre trin, hvor trin 1 svarer til Williams Sætning 14.6. Bemærk, at alle sandsynlighedsteorestiske argumenter kommer i trin 1, samt at kontinuiteten af M_t først benyttes i trin 3.

Trin 1:

Lad F være en endelig delmængde af $[0, T]$. Vi vil vise, at

$$P(\max_{t \in F} |M_t| > \lambda) \leq \lambda^{-p} E(|M_T|^p) \tag{3.2}$$

Vi nummererer F, lad os sige $F = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$, hvor $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leq T$.

Lad $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ være defineret ved:

$$\tau(\omega) = \inf\{k \mid |M_{t_k}(\omega)| > \lambda\},$$

hvor vi sætter $\inf \emptyset = \infty$. τ er en stoppetid, this hvis $1 \leq k \leq n$, så er:

$$\{w \mid \tau(\omega) = k\} = \{\omega \mid |M_{t_k}(\omega)| > \lambda\} \cap \cap_{j=1}^{k-1} \{M_{t_j}(\omega)| \leq \lambda\} \in \mathcal{M}_{t_k}.$$

Lad os for kortheds skyld sætte $A = \{\omega \mid \max_{t \in F} |M_t(\omega)| > \lambda\}$. Vi påstår at:

$$A = \cup_{k=1}^{n} (\tau = k) \tag{3.3}$$

Hvis $\omega \in A$, findes der $t \in F$, så $|M_t(\omega)| > \lambda$, og lader vi t_k være det mindste sådanne t, vil $\tau(\omega) = k$, så ω er med på højresiden af (3.3). Hvis ω tilhører højresiden af (3.3), findes det et $1 \leq k \leq n$ med $\tau(\omega) = k$, men da vil $\max_{t \in F} |M_t(\omega)| \geq |M_{t_k}(\omega)| > \lambda$, så $\omega \in A$. Dermed er (3.3) verificeret.

Da (M_t) er en martingale, giver Jensens ulighed for betingede middelværdier, at der for alle $1 \leq k \leq n$ gælder

$$E(|M_T|^p \mid \mathcal{M}_{t_k}) \geq |E(M_T \mid \mathcal{M}_{t_k})|^p = |M_{t_k}|^p. \tag{3.4}$$

Ved benyttelse af (3.3) og (3.4) finder vi:

$$\begin{aligned} E(|M_T|^p) \geq \int_A |M_T|^p dP &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(\tau=k)} |M_T|^p dP = \\ \sum_{k=1}^{n} \int_{(\tau=k)} E(|M_T|^p \mid \mathcal{M}_{t_k}) dP &\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{(\tau=k)} |M_{t_k}|^p dP \geq \\ \lambda^p \sum_{k=1}^{n} P(\tau = k) &= \lambda^p P(A), \end{aligned} \tag{3.5}$$

hvilket er det samme som (3.2). Ved det andet lighedstegn af (3.5) har vi benyttet, at for alle $1 \leq k \leq n$ vil $(\tau = k) \in \mathcal{M}_{t_k}$. Vi har dermed vist trin 1.

Trin 2:

Her vil vi vise, at

$$P(\sup_{t\in[0,T]\cap\mathbb{Q}}|M_t|>\lambda)\leq\lambda^{-p}E(|M_T|^p) \tag{3.6}$$

Da mængden $[0,T]\cap\mathbb{Q}$ er tællelig, kan vi skrive den som en følge; lad os sætte $[0,T]\cap\mathbb{Q}=\{q_k\mid k\in\mathbb{N}\}$ Vi sætter endvidere $F_n=\{q_j\mid 1\leq j\leq n\}$. Da F_n er en endelig mængde, giver Trin 1, at

$$P(\max_{t\in F_n}|M_t|>\lambda)\leq\lambda^{-p}E(|M_T|^p)\quad\text{for alle } n\in\mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Vi påstår, at

$$(\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}|M_t|>\lambda)=\cup_{n=1}^{\infty}(\max_{t\in F_n}|M_t|>\lambda). \tag{3.8}$$

Hvis nemlig ω tilhører venstresiden af (3.8), vil $\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}|M_t(\omega)|>\lambda$, og der findes derfor et $t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]$ med $|M_t(\omega)|>\lambda$ (bemærk, at det er væsentligt her, at der gælder skarpt ulighedstegn ved suprematet). Vælges n nu, så $t=q_n$, vil $t\in F_n$, og derfor vil $\max_{v\in F_n}|M_v(\omega)|>\lambda$, hvilket viser, at ω tilhører højresiden af (3.8). Hvis omvendt ω tilhører højresiden af (3.8), findes et n, så

$$\lambda<\max_{t\in F_n}|M_t(\omega)|\leq\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}|M_t(\omega)|,$$

hvilket viser, at ω tilhører venstresiden af (3.8); hermed er lighedstegnet i denne formel etableret.

Vi bemærker, at mængderne på højresiden af (3.8) udgør en voksende følge af mængder, så (3.7) giver

$$P(\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}|M_t|>\lambda)=\lim_n P(\max_{t\in F_n}|M_t|>\lambda)\leq\lambda^{-p}E(|M_T|^p),$$

således, at (3.6) er vist.

Trin 3:

Vi vil vise:

$$(\sup_{t\in[0,T]}|M_t|>\lambda)=_{n.s}\sup_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}|M_t|>\lambda), \tag{3.9}$$

hvor "$=_{n.s}$" betyder, at de to mænder er ens, når der fjernes en nulmængde. Lad ω tilhøre venstresiden af (3.9), således at funktionen $t\rightarrow M_t(\omega)$ er kontinuert (herved har vi fjernet en nulmængde). Der findes derfor et $t\in[0,T]$ med $|M_t(\omega)|>\lambda$, og da $\mathbb{Q}\cap[0,T]$ er tæt i $[0,T]$, findes en følge $(q_{n_k})\subseteq\mathbb{Q}\cap[0,T]$, så $q_{n_k}\rightarrow t$, og kontinuiteten sikrer, at $M_{q_{n_k}}(\omega)\rightarrow M_t(\omega)$. Derfor vil også $|M_{q_{n_k}}(\omega)|\rightarrow|M_t(\omega)|>\lambda$, hvilket medfører, at $|M_{q_{n_k}}(\omega)|>\lambda$ for n_k tilstrækkelig stor, hvilket viser, at ω tilhører højresiden af (3.9). Da den anden inklusion er klar, har vi vist (3.9).

Sammenholder vi nu Trin 2 og 3 får vi (3.1), som skulle vises.

Vi mangler nu blot at fjerne det skarpe ulighedstegn i (3.1). For ethvert $n\in\mathbb{N}$ giver (3.1), at

$$P(\sup_{t\in[0,T]}|M_t|>(\lambda-n^{-1}))\leq(\lambda-n^{-1})^{-p}E(|M_T|^p). \tag{3.10}$$

Da klart

$$(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| \geq \lambda) = \cap_{n=1}^{\infty}(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| > (\lambda - n^{-1})), \tag{3.11}$$

og mængderne på højresiden af (3.11) udgør en aftagende følge af mængder, giver (3.10), at

$$\begin{aligned} P(\sup t \in [0,T]|M_t| \geq \lambda) &= \lim_n P(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| > (\lambda - n^{-1})) \leq \\ \lim_n (\lambda - n^{-1})^{-p} E(|M_T|^p) &= \lambda^{-p} E(|M_T|^p), \end{aligned}$$

hvilket fuldfører beviset for sætningen. □

Det er let at se, at den ovenstående bevis også kan gennemføres for kontinuerte submartingales,; det vigtigste er faktisk at indse, at uligheden (3.4) gælder for submartingales. Doobs ulighed gælder derfor for kontinuerte submartingales.