Indledning

I disse noter vil uddybe nogle af Øksendals resultater i afsnittene 4 og 7 samt give andre beviser for dem. Disse resultater er gennemgået til forelæsningerne.

1 Martingalerepræsentationssætningen

Lemma 1.1 *(Øksendals Lemma 4.3.1)*

Lad $T > 0$ Mængden

$$A = \{\phi(B(t_1, t_2, \cdots, t_n) \mid t_j \in [0, T], \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad n \in \mathbb{N}\}$$

er tæt i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$.

Bevis: Lad (t_j) være en tæt følge i $[0, T]$ og sæt for ethvert $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{H}_n = \sigma(\{B_{t_j} \mid 1 \leq j \leq n\})$. Det er klart, at $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_{n+1}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Der gælder endvidere, at

$$\mathcal{F}_T = \sigma(\{\mathcal{H}_n \mid n \in \mathbb{N}\}) =_{def} \mathcal{H}_\infty \tag{1.1}$$

For at vise (1.1) bemærker vi først, at $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_T$ for alle $n \in \mathbb{N}$, således at $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_T$. Lad dernæst $t \in [0, T]$ være vilkårlig. Da (t_j) er tæt i $[0, T]$, findes der en delfølge (t_{n_k}) med $t_{n_k} \to t$, således at $B_{t_{n_k}} \to B_t$ n.s.. Da alle $B_{t_{n_k}}$'erne er $\mathcal{H}_\infty$–målelige, vil også B_t være $\mathcal{H}_\infty$–målelig. Da dette gælder for alle $t \in [0, T]$, vil $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{H}_\infty$.

Lad nu $g \in L_2(\mathcal{F}_T, P)$. Martingalekonvergenssætningen giver nu, at

$$g = E(g \mid \mathcal{F}_T) = E(g \mid \mathcal{H}_\infty) = \lim E(g \mid \mathcal{H}_n) \quad \text{n.s.}, \tag{1.2}$$

og [2, Theorem 3.2] giver dernæst, at konvergensen også er i $L_2(\mathcal{F}_T)$. Da $E(g \mid \mathcal{H}_n)$ $\mathcal{H}_n$–målelig for fast n, følger det af Doob–Dynkins Lemma, at der findes en Borelfunktion $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, således at $E(g \mid \mathcal{H}_n) = g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$. Det følger af [1, Sætning 2.13] og egenskaberne ved den Brownske bevægelse, at $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ er en n–dimensional normalfordeling, så hvis vi sætter

$$\mu = (B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})(P),$$

får μ formen $d\mu = f d\mathbf{m_n}$, hvor $\mathbf{m_n}$ betegner Lesbesguemålet på $\mathbb{R}^n$, og f er tæthedsfunktionen for en n–dimensional normalfordeling. Det følger nu af en generel sætning fra målteori, at $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ er tæt i $L_2(\mu)$. Da

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} g_n^2 d\mu &= \int_\Omega g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n}) dP = \\ \int_\Omega E(g \mid \mathcal{H}_n)^2 dP &\leq \int_\Omega g^2 dP < \infty, \end{aligned}$$

vil $g_n \in L_2(\mu)$, og vi kan derfor finde en følge $(\phi_k) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, således at $\phi_k \to g_n$ i $L_2(\mu)$. Integraltransformationssætningen giver atter, at $\phi_k(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n}) \to g_n(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$. $E(g \mid \mathcal{H}_n)$ kan altså approximeres i $L_2(\mathcal{F}_T, P)$ med noget fra A. Sammenholdes dette med (1.1), får vi at g kan approximeres med noget fra A. $\square$

For at kunne forstå beviset for Øksendals Lemma 4.3.2. må vi indføre nogle begreber og uden bevis nævne nogle sætninger, som skal bruges. Vi lader som før $\mathbf{m_n}$ betegne det n–dimensionale Lebesguemål og lader $< \cdot, \cdot >$ betegne det sædvanlige indre produkt på $\mathbb{R}^n$. Vi indfører nu

Definition 1.2 *Lad $f \in L_1(\mathbb{R}^n$. Fouriertransformen $\hat{f}$ af $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er defineret ved:*

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-i < x, y >) d\mathbf{m_n}(x)$$

for alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Det er ikke nogen tilfældighed, at dette minder noget om karakteristiske funktioner i sandsynlighedsteori.

Der gælder følgende sætning:

Sætning 1.3 *(inversionssætningen)*

Hvis $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ og $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, så gælder der for n.a. $x \in \mathbb{R}^n$, at

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) \exp(i < x, y >) d\mathbf{m_n}(y). \tag{1.3}$$

Det bør bemærkes, at man ikke kan forvente, at formel (1.3) gælder for alle $x \in \mathbb{R}^n$, da det let følger af majoriseret konvergens, at højresiden er kontinuert i x. Hvis man yderligere ved, at f er kontinuert, kommer (1.3) til at gælde for alle x.

Vi har yderligere en sætning om dette emne.

Sætning 1.4 *Hvis $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, vil $\hat{\phi} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, således at inversionssætningen kan benyttes på ϕ.*

Vi får også brug for lidt kompleks funktionsteori og starter med:

Definition 1.5 *En funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ kaldes differentiabel i punktet $z_0 \in \mathbb{C}$, hvis grænseværdien*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

eksister. $f'(z_0)$ kaldes ligesom i det reelle tilfælde for differentialkvotienten af f i punktet z_0.

Hvis f er differentiabel i alle punkter i $\mathbb{C}$, kaldes f holomorf (eller analytisk) i $\mathbb{C}$.

Strengt taget betyder analytisk i $\mathbb{C}$, at f kan udvikles i en potensrække omkring ethvert punkt i $\mathbb{C}$, men det er er en af hovedsætningerne i kompleks funktionsteori, at holomorf og analytisk er ækvivalenter begreber.

Vi får brug for følgende sætning:

Sætning 1.6 *Hvis $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf, og mængden af nulpunkter for f har et fortætningspunkt i $\mathbb{C}$, så er f identisk 0.*

Korollar 1.7 *Hvis $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er holomorf, og $f(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$, så er $f = 0$*

Bevis: Ethvert punkt i $\mathbb{R}$ er et fortætningspunkt for $\mathbb{R}$. □

Vi har brug for at benytte begrebet holomorf funktion af flere variable og indfører derfor:

Definition 1.8 *Lad $n \in \mathbb{N}$. En funktion $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ kaldes holomorf, hvis den er holomorf i hver variabel for sig.*

Som et korollar til Sætning 1.6 får vi:

Korollar 1.9 *Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ være holomorf. Hvis $f(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}^n$, så er $f = 0$.*

Bevis: Lad os fastholde $t_2, t_3, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ og betragt funktionen

$$g_1(z) = f(z, t_2, t_3, \cdots, t_n) \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C}.$$

g_1 er holomorf i en variabel, og da $g_1(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$ ifølge forudsætningerne, giver Korollar 1.7, at $g_1 = 0$, hvilket viser, at

$$f(z, t_2, t_3, \cdots, t_n) = 0 \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C} \text{ og alle } t_2, t_3, \cdots, t_n \in \mathbb{R}.$$

Vi fastholder nu $z_1 \in \mathbb{C}$ og $t_3, t_4, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$ og betragter funktionen

$$g_2(z) = f(z_1, z, t_3, t_4, \cdots, t_n)$$

for alle $z_1, z \in \mathbb{C}$ og alle $t_3, t_4, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$.

Da g_2 er holomorf i en variabel, og da det af første trin følger, at $g_2(z) = 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$, giver Korollar 1.7 atter, $g_2 = 0$, eller med andre ord, at

$$f(z_1, z_2, t_3, t_4, \cdots, t_n) = 0$$

for alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ og alle $t_3, t_4, \cdots, t_n \in \mathbb{R}$. Således fortsættes, indtil vi har behandlet alle n variable. □

I beviset for Øksendals Lemma 4.3.2. er det nødvendigt at vise, at funktionen G defineret ved formel (4.3.3) er holomorf, og det vil sige, at vi har brug for et argument, som gør det lovligt at differentiere under integraltegnet i (4.3.3). Lad os lige minde om, at hvis $z \in \mathbb{C}$ med $z = x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$, så er $\exp(z)$ defineret ved $\exp(z) = \exp(x)\exp(iy)$. Da $|\exp(iy)| = 1$, vil altså $|\exp(z)| = \exp(x)$. Der gælder desuden den sædvanlige rækkeudvikling:

$$\exp(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{for alle } z \in \mathbb{C}.$$

Vi får brug for følgende vurdering:

Lemma 1.10 *Hvis $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, så gælder der:*

$$\frac{|\exp(z) - 1|}{|z|} \leq \exp(|z|) \tag{1.4}$$

Bevis: Vi finder:

$$\begin{aligned} \frac{|\exp(z) - 1|}{|z|} &= |\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}| \leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{n!} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{n-1}}{(n-1)!} = \\ \exp(|z|) &. \end{aligned}$$

□

Lad nu G være defineret som i Øksendals formel (4.3.3). Lad $z_2, z_3, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ være faste og lad yderligere $z, z_0 \in \mathbb{C}$ med $z \neq z_0$. Vi finder, at

$$\frac{G(z, z_2, \cdots, z_n) - G(z_0, z_2, \cdots, z_n)}{z - z_0} = \int_\Omega \frac{\exp(zB_{t_1}) - \exp(z_0 B_{t_1})}{z - z_0} \exp(\sum_{k=2}^{n} z_k B_{t_k}) g dP, \tag{1.5}$$

og da $\exp$ er differentiabel får vi at

$$\frac{\exp(zB_{t_1}) - \exp(B_{t_1} z_0)}{z - z_0} \to B_{t_1} \exp(z_0 B_{t_1}) \tag{1.6}$$

for $z \to z_0$, så vi har brug for en vurdering af venstresiden, som gør det muligt at benytte majoriseret konvergens, når vi i (1.5) lader z gå mod z_0

Ved benyttelse af Lemma 1.10 finder vi for $\omega \in \Omega$ og $|z - z_0| \leq 1$:

$$\begin{aligned} &\frac{|\exp(zB_{t_1}(\omega)) - \exp(z_0 B_{t_1}(\omega))|}{|z - z_0|} = |\exp(z_0 B_{t_1}(\omega))| \frac{|\exp((z - z_0)B_{t_1}(\omega)) - 1|}{|z - z_0|} \leq \\ &\exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)|)|B_{t_1}(\omega)| \exp(|z - z_0||B_{t_1}(\omega)|) \leq |B_{t_1}(\omega)| \exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)| \exp(|B_{t_1}(\omega)|). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Vi kan nu formulere

Lemma 1.11 *Funktionen h defineret ved*

$$h(\omega) = |B_{t_1}(\omega) \exp(\Re(z_0)|B_{t_1}(\omega)|)| \exp(\sum_{k=2}^{n} z_k B_{t_k}(\omega))|$$

tilhører $L_2(P)$ og dermed vil $hg \in L_1(P)$.

Bevis: Vi bemærker, at $(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ er en n–dimensional normalfordeling, og derfor har billedmålet $\mu = (B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})(P)$ en tæthedsfunktion med hensyn til Lebesguemålet $\mathbf{m_n}$, som svarer til en normalfordeling. Integraltransformationssætningen giver derfor:

$$\int_\Omega h^2 dP = \int_{\mathbb{R}^n} x_1^2 \exp(2\Re(z_0)|x_1|)| \exp(2\sum_{k=2}^{n} z_k x_k)| d\mu(x_1, x_2, \cdots, x_n) < \infty,$$

idet der jo i udtrykket for tæthedsfunktionen for μ indgår led af formen $\exp(-cx_k^2)$ for passende $c > 0$. □

Det følger nu, at hg er en majorantfunktion uafhængig af z for integranten i (1.5), således at vi kan ombytte limes og integral i denne ligning, når vi lader $z \to z_0$. Sammen med (1.6) giver dette, at G er differentiabel i første variabel. På tilsvarende vis får vi, at G er differentiabel i de øvrige variable.

Vi kigger nu nærmere på Ølsendals Sætning 4.3.3. Vi lader $h \in L_2[0, T]$ og sætter som hos ham

$$Y_t = \exp(\int_0^t h dB - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2 ds) \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq T. \tag{1.8}$$

I beviset for Sætning 4.3.3 mangler der et argument for, at funktionen $(t, \omega) \to h(t)Y_t(\omega)$ tilhører $L_2([0, T] \times \Omega)$, og det vil vi give her. Vi starter med at vise:

Sætning 1.12 *For alle $t \in [0, T]$ og alle $1 \leq p < \infty$ vil $Y_t \in L_p(P)$ med*

$$E(Y_t^p) = \exp(\frac{p^2 - p}{2}\int_0^t h(s)^2 ds) \tag{1.9}$$

Bevis: Vi vil først vise påstanden for $p = 1$. Da h ikke afhænger af ω, er $\int_0^t h dB$ normaltfordelt med middelværdi 0 og varians $\int_0^t h(s)^2 ds = \sigma_t^2$, og vi finder derfor:

$$\int_\Omega Y_t dP = \frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(x - \frac{1}{2}\sigma_t) \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_t^2}) dx =$$
$$\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{(x - \sigma_t^2)}{2\sigma_t^2} dt = 1.$$

Lad nu $1 < p < \infty$. Vi vil benytte det lige viste med funktionen ph i stedet for h og finder:

$$E(Y_t^p) = E(\exp(\int_0^t (ph) dB - \frac{p}{2}\int_0^t h(s)^2 ds)) =$$
$$\exp(\frac{p^2 - p}{2}\int_0^t h(s)^2 ds) E(\exp(\int_0^t (ph) dB - \frac{1}{2}\int_0^t (ph(s))^2 ds) = \exp(\frac{p^2 - p}{2}\int_0^t h(s)^2 ds).$$

□

Vi kan nu vise:

Sætning 1.13 $\int_0^T h(t)^2 E(Y_t^2)dt = \exp(\int_0^T h(s)^2 ds) - 1.$

Bevis: Fra Sætning 1.12 får vi:

$$\begin{aligned}\int_0^T h(t)^2 E(Y_t^2)dt &= \int_0^T h(s)^2 \exp(\int_0^t h(s)^2 ds)dt = \\ (\exp(\int_0^t h(s)^2 ds))_0^T &= \exp(\int_0^T h(s)^2 ds) - 1.\end{aligned}$$

□

Sætning 1.13 giver umiddelbart det ønskede.

I forbindelse med undersøgelsen af Y_t ovenfor er det værd at komme med et par bemærkninger til løsningen til den stokastiske differentialligning

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \tag{1.10}$$

hvor $r, \alpha \in \mathbb{R}$ er givne tal og N_0 ligeledes er givet.

Vi ved, at løsningen er givet ved:

$$N_t = N_0 \exp((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t). \tag{1.11}$$

Hvis vi sætter $Y_t = \exp(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2)$, så er Y_t en proces af den type, vi netop har behandlet; nemlig med $h(s) = \alpha$ for alle $s \in [0, t]$. Med denne observation få vi let det følgende resultat, som Øksendal viser med et mere kompliceret argument i bemærkningen lige efter Eksempel 5.1.1.

Sætning 1.14 *Hvis N_0 er uafhængig af (B_t), så er*

$$E(N_t) = E(N_0)\exp(rt)$$

Bevis: For alle $0 \leq t$ har vi, at $N_t = \exp(rt)N_0 Y_t$, og af forudsætningerne følger det, at N_0 er uafhængig af Y_t. Sammen med Sætning 1.12 giver dette

$$E(N_t) = \exp(rt)E(N_0)E(Y_t) = \exp(rt)E(N_0).$$

□

2 Stoppetider

I dette afsnit vil vi vise følgende sætning (se også Øksendals eksempel 7.2.2). I forelæsningerne blev det vist ikke helt klart, hvorfor argumentet også virkede i tilfældet, hvor processen startede på randen af den åbne mængde U og straks løb ind i U. Det nedenstående bevis er derfor en lille smule anderledes, men princippet er det samme.

Sætning 2.1 *Lad $(\mathcal{M}_t)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$, således at*

(i) Hvis $N \in \mathcal{F}$ og $P(N) = 0$, så vil $N \in \mathcal{M}_t$ for alle $t > 0$.

(ii) $\cap_{t>0}\mathcal{M}_t = \mathcal{M}_0$.

Lad endvidere (X_t) være en $(\mathcal{M}_t)$–tilpasset n–dimensional proces, således at $t \to X_t(\omega)$ er kontinuert for n.a. $\omega \in \Omega$. Hvis $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er en åben mængde, sætter vi:

$$\tau_U(\omega) = \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \notin U\},$$

og her sætter vi $\inf \emptyset = \infty$. *τ_U er da en stoppetid, som kaldes den første exittid fra U.*

Bevis: Fra topologi følger det, at vi kan finde en følge (G_m) af åbne delmængder af U, således at:

- $\overline{G_m} \subseteq G_{m+1}$ for alle $m \in \mathbb{N}$.
- $\cup_{m=1}^{\infty} G_m = U$.

Sæt $\tau = \tau_U$ og lad først $t > 0$. Vi vil vise, at der gælder

$$\{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} =_{n.s.} \cup_{0<q\in\mathbb{Q}} \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{r\in\mathbb{Q}\cap[q,t[}\{\omega \in \Omega \mid X_r(\omega) \notin G_m\}, \tag{2.1}$$

og her betyder "$=_{n.s.}$", at lighedstegnet gælder, hvis der fjernes en nulmængde. Det ses umiddelbart, at mængden på højresiden tilhører $\mathcal{M}_t$.

Hvis ω tilhører højresiden af (2.1), findes der et $q \in \mathbb{Q}$ med $q > 0$, således at vi til ethvert $m \in \mathbb{N}$ kan finde et $r_m \in \mathbb{Q} \cap [q, t[$ med $X_{r_m}(\omega) \notin G_m$. Da $[q, t]$ er kompakt, findes der en konvergent delfølge (r_{m_k}), og hvis vi sætter $s = \lim r_m$, vil $s \in [q, t]$, og $X_{r_m}(\omega) \to X_s(\omega)$ (det er her, vi taber en nulmængde).

Hvis $X_s(\omega) \in U$, findes der et m_0, så $X_s(\omega) \in G_{m_0}$, og da G_{m_0} er åben, findes der et k_0 med $m_{k_0} > m_0$, så $X_{r_{m_k}}(\omega) \in G_{m_0} \subseteq G_{m_k}$ for alle $k \geq k_0$. Dette er i modstrid med vælget af følgen (r_m). Altså vil $X_s(\omega) \notin U$. Da $0 < s \leq t$ viser dette, $\tau(\omega) \leq s \leq t$.

Lad dernæst $\omega \in \Omega$ med $\tau(\omega) \leq t$. Hvis $\tau(\omega) < t$ kan vi finde et $0 < s < t$, så $X_s(\omega) \notin U$, og hvis $\tau(\omega) = t$, kan vi sætte $s = t$ og får atter $X_s(\omega) \notin U$. Lad nu $q \in]0, s[\cap\mathbb{Q}$ og lad $m \in \mathbb{N}$. Hvis $X_r(\omega) \in G_m$ for alle $r \in [q, s[\cap\mathbb{Q}$, så vil

$$X_s(\omega) = \lim_{r\to s, r\in\mathbb{Q}} X_r(\omega) \in \overline{G_m} \subseteq U,$$

hvilket er en modstrid. Der findes altså et $r \in [q, s[\cap \mathbb{Q}$, så $X_r(\omega) \notin G_m$. Dette viser, at ω tilhører højresiden af (2.1).

Hvis $t = 0$ får vi at

$$(\tau = 0) = \cap_{k=1}^{\infty}(\tau \leq \frac{1}{k}) \in \cap_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_{\frac{1}{k}} = \mathcal{M}_0.$$

Vi har dermed vist, at τ er en stoppetid. $\square$

Vi skal senere se, at hvis(X_t) er en Ito diffusionsproces, så er betingelsen (ii) i sætningen opfyldt, hvis vi sætter $\mathcal{M}_t = \sigma(\{X_s \mid 0 \leq s \leq t\} \cup \mathcal{N})$.

Følgende proposition er ofte anvendelig:

Proposition 2.2 *Lad $U \subseteq \mathbb{R}^n$ være åben, og lad (G_m) være en følge af åbne delmængder af $\mathbb{R}^n$, således, at $G_m \subseteq G_{m+1}$ for alle $m \in \mathbb{N}$ og således at $U = \cup_{m=1}^{\infty} G_m$. Hvis (X_t) opfylder betingelserne i Sætning 2.1 og der findes et $x_0 \in U$ med $X_0(\omega) = x_0$ for n.a. $\omega \in \Omega$, så vil $\tau_{G_m} \uparrow \tau_U$ n.s.*

Bevis: Det følger umiddelbart af definitionen, at $\tau_{G_m} \leq \tau_{G_{m+1}} \leq \tau_U$ for alle $m \in \mathbb{N}$, således at $\lim_m \tau_{G_m}$ eksister n.s. med

$$\lim_m \tau_{G_m} \leq \tau_U. \tag{2.2}$$

Vi bemærker, at da $x_0 \in U$, vil $\tau > 0$, så lad $\omega \in \Omega$ og lad $0 < t < \tau(\omega)$ være vilkårlig. Da vil mængden

$$\{X_s(\omega) \mid 0 \leq s \leq t\} \subseteq U,$$

og K vil derfor være overdækket af G_m–erne, men da $s \to X_s(\omega)$ er kontinuert, vil K være kompakt, og derfor findes det et $m_0 \in \mathbb{N}$ med $K \subseteq G_{m_0}$ (husk, at (G_m) er en voksende følge af mængder. Dette viser at hvis $m \geq m_0$, så vil $\tau_{G_m}(\omega) > t$. Dette viser påstanden. $\square$

References

[1] N.J. Nielsen, *Den Brownske bevægelse*, Noter SDU.

[2] N.J. Nielsen, *Resumé of the lectures in Probability Theory II*,**2009**