Tidshomogene Itô diffussionsprocesser

Supplement til kapitel 7 i [Øksendal]

S. Thorbjørnsen
Institut for Matematik & Datalogi
Syddansk Universitet

December 15, 2004

1 Stærk løsning af Stokastiske Differentialligninger.

Vi skal bygge vores diskussion af tidshomogene Itô processer (se Afsnit 2) på nedenstående dybe resultat (Sætning 1.1). Det vil føre for vidt at bevise dette resultat i denne sammenhæng, men ikke desto mindre er Sætning 1.1 meget informativ læsning. Et bevis for Sætning 1.1 kan findes i Martin Jacobsens forelæsningsnoter om stokastiske processer fra Københavns Universitet.

Først noget notation: Betragt rummet $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ bestående af alle kontinuerte funktioner $w\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}^n$. For hvert t i $[0,\infty[$ betragter vi projektionen $\hat{X}_t\colon C([0,\infty[,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ givet ved:

$$\hat{X}_t(w) = w(t), \quad w \in C([0,\infty[,\mathbb{R}^n).$$

Vi udstyrer så $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ med σ-algebraen $\mathcal{H}^n$ frembragt af familien $\{\hat{X}_t \mid t \geq 0\}$, altså

$$\mathcal{H}^n = \sigma(\{\hat{X}_t \mid t \geq 0\}).$$

Vi skal endvidere udstyre $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ med topologien svarende til uniform konvergens på kompakte mængder. Hvis (w_k) er en følge i $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ og $w \in C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$, så gælder altså at $w_k \to w$ i $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ for $k \to \infty$, netop hvis

$$\forall t \geq 0\colon \sup_{s \leq t} \|w_k(s) - w(s)\| \to 0, \quad \text{for } k \to \infty.$$

1.1 Sætning. *Lad*

$$b(\cdot,\cdot)\colon [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad \textit{og} \quad \sigma(\cdot,\cdot)\colon [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$$

være givne målelige afbildninger, og antag at der findes positive konstanter C, D, således at b, σ opfylder Lipschitz betingelserne:

$$\|b(t,x)\| + \|\sigma(t,x)\| \leq C(1 + \|x\|), \tag{1.1}$$

for $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ *og*

$$\|b(t,x) - b(t,y)\| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\| \leq D\|x - y\|, \tag{1.2}$$

for $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$.

Der findes så en afbildning $F_{b,\sigma}\colon \mathbb{R}^n \times C([0,\infty[,\mathbb{R}^m) \to C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$, *som har følgende egenskaber:*

(a) $F_{b,\sigma}$ *er* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{H}^m - \mathcal{H}^n$*–målelig.*

(b) *For ethvert fast* w *i* $C([0,\infty[,\mathbb{R}^m)$ *er afbildningen* $x \mapsto F_{b,\sigma}(x,w)\colon \mathbb{R}^n \to C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ *kontinuert, når* $C([0,\infty[,\mathbb{R}^n)$ *udstyres med topologien for uniform konvergens på kompakte mængder.*

(c) *For enhver* m*-dimensional Brownsk bevægelse* (B_t) *defineret på et sandsynlighedsfelt* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *og for enhver* n*-dimensional stokastisk variabel* Z *i* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *som er uafhængig af* $(B_t)_{t\geq 0}$, *er løsningen* (X_t) *til den stokastiske differentialligning:*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dB_t, & t \geq 0, \\ X_0 = Z, \end{cases} \tag{1.3}$$

givet ved:

$$(X_t)_{t\geq 0} = F_{b,\sigma}(Z, (B_t)),$$

eller mere præcist

$$(X_t(\omega))_{t\geq 0} = F_{b,\sigma}\big(Z(\omega), (B_t(\omega))_{t\geq 0}\big),$$

for (næsten alle) ω *i* Ω.

(d) *Lad* (B_t) *og* $(\widehat{B}_t)$ *være* m*-dimensionale Brownske bevægelser definerede på sandsynlighedsfelterne* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *hhv.* $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{P})$. *Lad videre* Z *og* $\widehat{Z}$ *være* n*-dimensionale stokastiske variable i hhv.* $L^2(P)$ *og* $L^2(\widehat{P})$, *som er uafhængige af hhv.* (B_t) *og* $(\widehat{B}_t)$. *Hvis* Z *og* $\widehat{Z}$ *har samme fordeling, så har også processerne* $F_{b,\sigma}(Z, (B_t))$ *og* $F_{b,\sigma}(\widehat{Z}, (\widehat{B}_t))$ *samme fordeling.*

Udsagnet (c) i Sætning 1.1 udtrykker, at vi har "stærk løsning" til stokastiske differentialligninger af typen (1.3). Udsagnet (d) udtrykker efterfølgende, at løsningerne til sådanne differentialligninger altid har samme fordeling, når fordelingen af Z er foreskrevet.

I forbindelse med entydigheds-argumenter får vi yderligere brug for følgende observation:

1.2 Bemærkning. Lad b, σ være som i Sætning 1.1, således at Lipschitz betingelserne (1.1) og (1.2) er opfyldte. Lad videre (B_t) være en Brownsk bevægelse defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad $\mathcal{N}$ betegne mængden af (generaliserede) P-nulmængder. Lad endelig Z være en stokastisk variabel i $L^2(P)$, som er uafhængig af (B_t). Betragt så den stokastiske differentialligning:

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dB_t, & t \geq 0, \\ X_0 = Z. \end{cases}$$

Som bekendt er løsningen til denne differentialligning en kontinuert proces (X_t), som opfylder betingelserne:

(i) (X_t) er tilpasset mht. filtreringen: $\tilde{\mathcal{F}}_t^Z = \sigma(\{Z\} \cup \{B_s \mid s \leq t\}) \vee \mathcal{N}$, $t \geq 0$.

(ii) $\int_{[0,t]\times\Omega} |X(s,\omega)|^2 \, d(m \otimes P)(s,\omega) < \infty$, for alle $t \geq 0$,

(iii) $X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \, dB_s$, for alle $t \geq 0$.

Betragt nu en ny filtrering $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, som opfylder at $\tilde{\mathcal{F}}_t^Z \subseteq \mathcal{G}_t$ for alle t, samt betingelsen

$$\forall \ 0 \leq s < t \colon B_t - B_s \text{ er uafhængig af } \mathcal{G}_s.$$

Antag så at (Y_t) er en kontinuert proces, som er tilpasset mht. $(\mathcal{G}_t)$, og som opfylder at $\int_{[0,t]\times\Omega} |Y(s,\omega)|^2 \, d(m \otimes P)(s,\omega) < \infty$, for alle $t \geq 0$, samt at

$$Y_t = Z + \int_0^t b(s, Y_s) \, ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s) \, dB_s,$$

for alle $t \geq 0$. For sådanne processer fungerer entydighedsbeviset (fra eksistens og entydighedssætningen) stadig, og da løsningen $(X_t)_{t\geq 0}$ specielt er tilpasset mht. $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, kan man således slutte at

$$P(\forall t \geq 0 \colon X_t = Y_t) = 1.$$

Specielt bliver (Y_t) faktisk nødt til at være tilpasset mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_t^Z)$, idet $\tilde{\mathcal{F}}_t^Z$ jo indeholder alle P-nulmængder for alle t.

1.3 Definition. Lad (Y_t) være en stokastisk proces defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og lad $(\mathcal{G}_t)$ være en filtrering på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Vi siger da, at (Y_t) har *uafhængige tilvækster mht.* $(\mathcal{G}_t)$, hvis følgende betingelse er opfyldt:

$$\forall \ 0 \leq s < t \colon Y_t - Y_s \text{ er uafhængig af } \mathcal{G}_s.$$

2 Tidshomogenitet.

2.1 Definition. En tidshomogen Itô diffusionsproces er en stokastisk proces, som er løsning til en stokastisk differentialligning af formen:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t) \, dt + \sigma(X_t) \, dB_t, & t \geq s, \\ X_s = x_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

hvor

(i) $b \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ og $\sigma \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ er målelige afbildninger, som opfylder Lipschitz betingelsen:

$$\|b(x) - b(y)\| + \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq D\|x - y\|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

for en passende konstant $D > 0$.

(ii) $(B_t)_{t\geq 0}$ er en Brownsk bevægelse defineret på et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(iii) $x_0 \in \mathbb{R}^n$ og $s \in [0, \infty[$.

2.2 Bemærkning. Med b og σ som i Definition 2.1 gælder også Lipschitz betingelsen:

$$\|b(x)\| + \|\sigma(x)\| \leq C(1 + \|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

for en passende konstant $C > 0$. For x i $\mathbb{R}^n$ har vi nemlig at

$$\|b(x)\| \leq \|b(x) - b(0)\| + \|b(0)\| \leq D\|x\| + \|b(0)\| \leq C_1(\|x\| + 1),$$

hvor $C_1 = \max\{\|b(0)\|, D\}$. Tilsvarende fås at $\|\sigma(x)\| \leq C_2(\|x\| + 1)$, hvor $C_2 = \max\{\|\sigma(0)\|, D\}$.

Det fremgår altså at b og σ opfylder begge Lipschitz betingelser fra eksistens og entydighedssætningen, og dermed har (2.1) en entydig løsning, som vi det følgende betegner med $(X_t^{s,x_0})_{t\geq s}$, når det er underforstået hvilken Brownsk bevægelse, der betragtes i (2.1).

At processerne indført i Definition 2.1 kaldes tidshomogene skyldes følgende resultat:

2.3 Sætning. *Lad (B_t) være en givet Brownsk bevægelse defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt den stokastiske differentialligning* (2.1). *Med notation som i Bemærkning 2.2, gælder da, at for vilkårlige s i $[0, \infty[$ og x i $\mathbb{R}^n$ har processerne $(X_{s+t}^{s,x})_{t\geq 0}$ og $(X_t^{0,x})_{t\geq 0}$ samme fordeling.*

Til beviset får vi brug for følgende opgave:

2.4 Opgave. Lad $(B_t)_{t\geq 0}$ være en Brownsk bevægelse defineret på sandsynlighedsfeltet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og betragt den tilhørende fuldstændiggjorte filtrering $\mathcal{H} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ givet ved:

$$\tilde{\mathcal{F}}_t = \sigma\big(\{B_s \mid 0 \leq s < t\}\big) \vee \mathcal{N}, \qquad (t \geq 0).$$

Betragt videre et fast $s \geq 0$, og definér så processen $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ ved:

$$\widehat{B}_t = B_{t+s} - B_s, \quad (t \geq 0).$$

Det følger fra Opgave 2.12 i [Øksendal], at $(\widehat{B}_t)$ igen er en Brownsk bevægelse. Betragt endelig filtreringen $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ givet ved

$$\mathcal{G}_t = \tilde{\mathcal{F}}_{s+t}, \qquad (t \geq 0).$$

(1) Vis at $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ har uafhængige tilvækster mht. filtreringen $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.

(2) Vis at $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ er en martingal mht. filtreringen $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.

Det følger fra (1) og (2), at man kan gennemføre konstruktionen af Itô-integralet mht. den Brownske bevægelse $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ for alle processer i klassen $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(a, b)$, som vi tidligere har defineret. Specielt gælder Itô-isometrien. Tilsvarende kan man (som bekendt) betragte Itô-integraler mht. den oprindelige Brownske bevægelse $(B_t)_{t\geq 0}$ for enhver proces i klassen $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(a, b)$.

(3) Lad h være et fast positivt tal. Vis, at der for enhver proces $(\phi(t))_{t\in[s,s+h]}$ i klassen $\mathcal{V}_{\mathcal{H}}(s,s+h)$ gælder at processen $(\phi(s+t))_{t\in[0,h]}$ tilhører klassen $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}(0,h)$, og at

$$\int_s^{s+h} \phi(t)\ dB_t = \int_0^h \phi(s+t)\ d\widehat{B}_t.$$

[Vink: Antag først at ϕ er en elementær proces].

Bevis for Sætning 2.3. Lad s i $[0,\infty[$ være givet, og lad $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ være som i Opgave 2.4. For t i $[0,\infty[$ finder vi så:

$$\begin{aligned} X^{s,x}(s+t) &= x + \int_s^{s+t} b(X^{s,x}(u))\ du + \int_s^{s+t} \sigma(X^{s,x}(u))\ dB_u \\ &= x + \int_0^t b(X^{s,x}(s+u))\ du + \int_0^t \sigma(X^{s,x}(s+u))\ d\widehat{B}_u, \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet Opgave 2.4 (for tidsintegralet følger omskrivningen af velkendte egenskaber for Lebesgue-integralet). Ovenstående viser, at processen $(X^{s,x}(s+t))_{t\geq 0}$ er en løsning til den stokastiske differentialligning:

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ d\widehat{B}_t, & t \geq 0, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.3}$$

hvis man (i første omgang) ser bort fra betingelsen om, at løsningen skal være tilpasset mht. filtreringen

$$\mathcal{D}_t = \sigma\big(\{x\} \cup \{\widehat{B}_u \mid 0 \leq u \leq t\}\big) \vee \mathcal{N} = \sigma\big(\{\widehat{B}_u \mid 0 \leq u \leq t\}\big) \vee \mathcal{N}, \quad (t \geq 0).$$

Men $(X^{s,x}(s+t))_{t\geq 0}$ er jo i hvert fald tilpasset mht. filtreringen $(\tilde{\mathcal{F}}_{s+t})_{t\geq 0}$, og ifølge Opgave 2.4 har den Brownske bevægelse $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ uafhængige tilvækster mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_{s+t})_{t\geq 0}$ (jvf. Definition 1.3). Da også $\mathcal{D}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{s+t}$, følger derfor fra Bemærkning 1.2, at $(X^{s,x}(s+t))_{t\geq 0}$ ér løsningen til (2.3), dvs. (modulo en nulmængde) $(X^{s,x}(s+t))_{t\geq 0} = F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))$ (jvf. Sætning 1.1). Det følger dernæst fra Sætning 1.1, at $(X^{s,x}(s+t))_{t\geq 0}$ har samme fordeling som processen $F_{b,\sigma}(x,(B_t)) = (X^{0,x}(t))_{t\geq 0}$. ■

3 Markovegenskaben.

Vi skal først vise et generelt resultat om betingede middelværdier. Betragt et sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathcal{F},P)$. For enhver $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{F}$-målelig, begrænset funktion $h\colon \mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{R}$ skal vi betragte funktionen $\varphi_h\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, givet ved:

$$\varphi_h(x) = \mathbb{E}\{h(x,\cdot)\}, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

3.1 Lemma. *Betragt et sandsynlighedsfelt $(\Omega,\mathcal{F},P)$, og lad $\mathcal{D}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$. Lad videre $X\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ være en $\mathcal{D}$-målelig afbildning, og lad $g\colon\mathbb{R}^n\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ være en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{F}$-målelig afbildning, som opfylder følgende to betingelser:*

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n \colon g(x,\cdot) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *er uafhængig af* $\mathcal{D}$.

(b) $\forall \omega \in \Omega \colon g(\cdot,\omega) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *er kontinuert.*

For enhver begrænset Borel funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *gælder da:*

$$\mathbb{E}\big\{f \circ g(X(\cdot),\cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} = \varphi_{f\circ g} \circ X. \tag{3.1}$$

Bevis. Vi opdeler beviset i tre dele.

1°. Vi viser først (3.1), i tilfældet hvor $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en kontinuert begrænset funktion. Sæt $h = f \circ g \colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$, og bemærk at h opfylder betingelserne:

(a') $\forall x \in \mathbb{R}^n \colon h(x,\cdot)$ er uafhængig af $\mathcal{D}$.

(b') $\forall \omega \in \Omega \colon h(\cdot,\omega)$ er kontinuert.

Antag først, at X er en simpel stokastisk variabel, altså at

$$X = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{D_j},$$

for passende $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$ og disjunkte $D_1, \dots, D_k \in \mathcal{D}$, hvor $\cup_{j=1}^k D_j = \Omega$. Bemærk så at

$$h(X(\omega),\omega) = \sum_{j=1}^{k} h(\alpha_j,\omega) \cdot 1_{D_j}(\omega),$$

for alle ω i Ω. Det følger derfor vha. (a'), at

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big\{h(X(\cdot),\cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big\{h(\alpha_j,\cdot) \cdot 1_{D_j}(\cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} \\
&= \sum_{j=1}^{k} 1_{D_j} \mathbb{E}\big\{h(\alpha_j,\cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} \\
&= \sum_{j=1}^{k} 1_{D_j} \mathbb{E}\big\{h(\alpha_j,\cdot)\big\}.
\end{aligned}$$

På den anden side finder vi, at

$$\varphi_h \circ X = \sum_{j=1}^{k} \varphi_h(\alpha_j) \cdot 1_{D_j} = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\{h(\alpha_j,\cdot)\} \cdot 1_{D_j},$$

og dermed følger (3.1) i dette tilfælde.

For en generel $\mathcal{D}$-målelig afbildning $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ kan vi vælge en følge (X_k) af simple $\mathcal{D}$-målelige afbildninger $X_k\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, således at

$$\forall \omega \in \Omega\colon X_k(\omega) \to X(\omega), \quad \text{for } k \to \infty.$$

Pga. (b') følger så at også

$$\forall \omega \in \Omega\colon h(X_k(\omega), \omega) \to h(X(\omega), \omega), \quad \text{for } k \to \infty.$$

Ved hjælp af Jensen's ulighed for betingede middelværdier finder vi så, at

$$\begin{aligned}\big\|\mathbb{E}\big\{h(X_k(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} - \mathbb{E}\big\{h(X(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\}\big\|_1 &= \mathbb{E}\Big\{\Big|\mathbb{E}\big\{h(X_k(\cdot), \cdot) - h(X(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\}\Big|\Big\} \\ &\le \mathbb{E}\Big\{\mathbb{E}\big\{|h(X_k(\cdot), \cdot) - h(X(\cdot), \cdot)| \bigm| \mathcal{D}\big\}\Big\} \\ &= \mathbb{E}\big\{|h(X_k(\cdot), \cdot) - h(X(\cdot), \cdot)|\big\} \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

hvor vi til sidst benytter majoriseret konvergens. Vi har altså at $\mathbb{E}\{h(X_k(\cdot), \cdot) \mid \mathcal{D}\} \to \mathbb{E}\{h(X(\cdot), \cdot)$ i $L^1(P)$, og ved at overgå til en delfølge, kan vi så antage at

$$\mathbb{E}\{h(X_k(\cdot), \cdot) \mid \mathcal{D}\} \to \mathbb{E}\{h(X(\cdot), \cdot)\} \quad \text{n.s.}$$

Bemærk på den anden side, at funktionen $x \mapsto \varphi_h(x) = \mathbb{E}\{h(x, \cdot)\}$ er kontinuert pga. (b') og majoriseret konvergens. Det følger derfor, at

$$\forall \omega \in \Omega\colon \varphi_h \circ X_k(\omega) \to \varphi_h \circ X(\omega), \quad \text{for } k \to \infty.$$

Ialt følger nu, at

$$\mathbb{E}\big\{h(X(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\big\{h(X_k(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} = \lim_{k\to\infty} \varphi_h \circ X_k = \varphi_h \circ X, \quad \text{n.s.},$$

som ønsket.

2°. Vi viser dernæst (3.1) i tilfældet $f = 1_A$, hvor $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Hvis A er et åbent interval i $\mathbb{R}^n$, kan vi vælge en følge (f_k) af kontinuerte funktioner $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, således at

- $f_k(x) \in [0, 1]$ for alle x i $\mathbb{R}^n$.
- $f_k(x) \underset{k\to\infty}{\nearrow} f(x)$ for alle x i $\mathbb{R}^n$.

Specielt gælder så for hvert ω i Ω, at $f_k \circ g(X(\omega), \omega) \nearrow 1_A \circ g(X(\omega), \omega)$ for $k \to \infty$. Det følger så fra 1° og Sætning 1.4(g) i [M. Jacobsen], at

$$\mathbb{E}\big\{1_A \circ g(X(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}\big\{f_k \circ g(X(\cdot), \cdot) \bigm| \mathcal{D}\big\} = \lim_{k\to\infty} \varphi_{f_k \circ g} \circ X = \varphi_{1_A \circ g} \circ X, \text{ n.s.},$$

hvor vil til sidst benytter, at for alle x i $\mathbb{R}^n$ gælder, at

$$\varphi_{f_k \circ g}(x) = \mathbb{E}\{f_k \circ g(x, \cdot)\} \nearrow \mathbb{E}\{1_A \circ g(x, \cdot)\} = \varphi_{1_A \circ g}(x), \quad \text{for } k \to \infty,$$

ved monoton konvergens.

Betragt nu klassen

$$\mathcal{C} = \big\{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \;\big|\; \mathbb{E}\big\{1_A \circ g(X(\cdot), \cdot) \;\big|\; \mathcal{D}\big\} = \varphi_{1_A \circ g} \circ X \text{ n.s.}\big\}.$$

Det ses let, at $\mathcal{C}$ er lukket overfor "$\setminus$", og præcis som ovenfor ses at $\mathcal{C}$ også er lukket overfor "$\nearrow$" ved anvendelse af Sætning 1.4(g) i [M. Jacobsen] og monoton konvergens. Vi har tillige netop set, at $\mathcal{C}$ indeholder systemet af alle åbne intervaller i $\mathbb{R}^n$, som er et $\cap$-stabilt frembringersystem for $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Det følger dermed fra Lemma 1.1 i [M. Jacobsen], at $\mathcal{C} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, som ønsket.

3°. Vi viser endelig (3.1) for en generel begrænset Borel funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Hvis f er en positiv, simpel Borel funktion, kan vi skrive f på formen: $f = \sum_{j=1}^k \beta_j 1_{A_j}$, for passende $k \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_k \in [0, \infty[$ og $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Det følger så fra 2° og linearitet, at

$$\mathbb{E}\big\{f \circ g(X(\cdot), \cdot) \;\big|\; \mathcal{D}\big\} = \varphi_{f \circ g} \circ X.$$

For en vilkårlig positiv, begrænset Borel funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kan vi vælge en følge (f_k) af simple positive funktioner $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, således at $f_k(x) \nearrow f(x)$, $k \to \infty$, for alle x i $\mathbb{R}^n$. Som ovenfor følger så (vha. Sætning 1.4(g) i [M. Jacobsen] og monoton konvergens), at

$$\mathbb{E}\big\{f \circ g(X(\cdot), \cdot) \;\big|\; \mathcal{D}\big\} = \lim_{k \to \infty} \mathbb{E}\big\{f_k \circ g(X(\cdot), \cdot) \;\big|\; \mathcal{D}\big\} = \lim_{k \to \infty} \varphi_{f_k \circ g} \circ X = \varphi_{f \circ g} \circ X, \text{ n.s.}$$

Endelig opnås (3.1) for en generel begrænset Borel funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ved at splitte f i positiv- og negativ-del: $f = f^+ - f^-$, hvor $f^+ = \max\{f, 0\}$ og $f^- = -\min\{f, 0\}$. ■

Vi skal i det følgende betragte et fast sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en m-dimensional Brownsk bevægelse $(B_t)_{t \geq 0}$ defineret herpå. Med $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ betegner vi som sædvanlig den fuldstændiggjorte filtrering genereret af (B_t). Vi skal ligeledes betragte givne målelige afbildninger $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ og $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$, som opfylder Lipschitz betingelsen (2.2). Husk så, at for x i $\mathbb{R}^n$ betegner vi med $(X_t^{0,x})$ løsningen til differentialligningen

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)\; dt + \sigma(X_t)\; dB_t, & t \geq 0, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

For en begrænset Borel funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skal vi endvidere betragte funktionen $\Psi_f : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ givet ved:

$$\Psi_f(t, x) = \mathbb{E}\{f(X_t^{0,x})\}, \quad t \in [0, \infty[, \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

3.2 Sætning. (Markov-egenskaben) *Lad (X_t) være en tidshomogen Itô diffussionsproces, dvs. $(X_t) = (X_t^{0,x_0})$ for et passende x_0 i $\mathbb{R}^n$. For enhver begrænset Borel funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og vilkårlige $s, h \geq 0$ gælder da, at*

$$\mathbb{E}\big\{f(X_{s+h}) \;\big|\; \tilde{\mathcal{F}}_s\big\} = \Psi_f(h, X_s) = \Psi_f(h, \cdot) \circ X_s, \quad \text{n.s.}$$

Bevis. Betragt et fast s i $[0,\infty[$. Ved anvendelse af Opgave 2.4, finder vi så for t i $[0,\infty[$, at

$$\begin{aligned}
X_{s+t} &= x_0 + \int_0^{s+t} b(X_u)\,du + \int_0^{s+t} \sigma(X_u)\,dB_u \\
&= \Big(x_0 + \int_0^s b(X_u)\,du + \int_0^s \sigma(X_u)\,dB_u\Big) + \int_s^{s+t} b(X_u)\,du + \int_s^{s+t} \sigma(X_u)\,dB_u \\
&= X_s + \int_0^t b(X_{s+u})\,du + \int_0^t \sigma(X_{s+u})\,d\widehat{B}_u,
\end{aligned}$$

hvor $(\widehat{B}_u)_{u\geq 0}$ er den Brownske bevægelse givet ved: $\widehat{B}_u = B_{s+u} - B_s$ for $u \geq 0$. Bemærk at X_s er uafhængig af $(\widehat{B}_u)_{u\geq 0}$, idet X_s er $\tilde{\mathcal{F}}_s$-målelig. Ovenstående viser, at processen $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ er en løsning til den stokastiske differentialligning:

$$\begin{cases} dY_t = b(Y_t)\,dt + \sigma(Y_t)\,d\widehat{B}_t, & t \geq 0, \\ Y_0 = X_s, \end{cases}$$

hvis man (i første omgang) ser bort fra betingelsen om, at løsningen skal være tilpasset mht. filtreringen

$$\mathcal{D}_t = \sigma\big(\{X_s\} \cup \{\widehat{B}_u \mid 0 \leq u \leq t\}\big) \vee \mathcal{N}, \quad (t \geq 0).$$

Men $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ er jo i hvert fald tilpasset mht. filtreringen $(\tilde{\mathcal{F}}_{s+t})_{t\geq 0}$, og ifølge Opgave 2.4 har $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ uafhængige tilvækster mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_{s+t})_{t\geq 0}$. Bemærk også at $\mathcal{D}_t \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{s+t}$ for alle $t \geq 0$. Det følger derfor fra Bemærkning 1.2, at $(X_{s+t})_{t\geq 0}$ ér løsningen til (2.3), dvs. (modulo en nulmængde) $(X_{s+t})_{t\geq 0} = F_{b,\sigma}(X_s, (\widehat{B}_t))$ (jvf. Sætning 1.1).

Betragt nu et fast $h \geq 0$ og definér afbildningen $g\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ ved:

$$g(x,\omega) = \big[F_{b,\sigma}(x, (\widehat{B}_t))\big](h,\omega), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \omega \in \Omega.$$

Ifølge ovenstående har vi så at

$$X_{s+h}(\omega) = g(X_s(\omega),\omega), \quad \text{for næsten alle } \omega.$$

Idet $F_{b,\sigma}$ er målelig (jvf. Sætning 1.1(a)) bliver g $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathcal{F}$-målelig. Bemærk også, at for ethvert x i $\mathbb{R}^n$ er $g(x,\cdot)$ målelig mht. $\sigma(\{\widehat{B}_t \mid t \geq 0\})$ og dermed uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_s$. Da $F_{b,\sigma}$ er kontinuert i første variabel (jvf. Sætning 1.1) fremgår videre, at for hvert fast ω i Ω er $g(\cdot,\omega)$ kontinuert på $\mathbb{R}^n$. Alle forudsætninger er således opfyldte for, at vi kan benytte Lemma 3.1 i tilfældet $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{F}}_s$ (husk at X_s ér $\tilde{\mathcal{F}}_s$-målelig). For en vilkårlig begrænset Borel funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ finder vi således, at

$$\mathbb{E}\big\{f(X_{s+h}) \bigm| \tilde{\mathcal{F}}_s\big\} = \mathbb{E}\big\{f\circ g(X_s(\cdot),\cdot) \bigm| \tilde{\mathcal{F}}_s\big\} = \varphi_{f\circ g}\circ X_s, \quad \text{n.s.} \tag{3.3}$$

Bemærk her, at for x i $\mathbb{R}^n$ har vi

$$\varphi_{f\circ g}(x) = \mathbb{E}\{f\circ g(x,\cdot)\},$$

og her er

$$g(x,\cdot) = [F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))](h,\cdot).$$

Ifølge Sætning 1.1 har processerne $F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))$ og $F_{b,\sigma}(x,(B_t)) = (X_t^{0,x})_{t\geq 0}$ samme fordeling, så specielt har den stokastiske variabel $g(x,\cdot) = [F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))](h,\cdot)$ samme fordeling som $[F_{b,\sigma}(x,(B_t))](h,\cdot) = X_h^{0,x}$. Dette medfører, at

$$\varphi_{f\circ g}(x) = \mathbb{E}\{f\circ g(x,\cdot)\} = \mathbb{E}\{f(X_h^{0,x})\} = \Psi_f(h,x).$$

Indsættes dette i (3.3), opnås den ønskede formel. ■

4 Den Stærke Markovegenskab.

I dette afsnit skal vi -løst sagt- vise, at Sætning 3.2 stadig gælder, hvis det faste tidspunkt t erstattes af et stokastisk; dvs. af en stoppetid. Vi starter med nogle generelle overvejelser omkring stoppetider, hvor vi dog i de fleste argumenter nøjes med at betragte stoppetider, som kun antager værdier i en tællelig mængde (for simpelheds skyld).

I det følgende betragter vi en ikke-tom mængde Ω og en voksende familie $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$ af σ-algebraer af delmængder af Ω.

4.1 Definition. En funktion $\tau\colon \Omega \to [0,\infty[$ kaldes en stoppetid mht. $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$, hvis

$$\forall t\geq 0\colon (\tau\leq t)\in\mathcal{M}_t. \tag{4.1}$$

4.2 Bemærkning. Hvis τ er en stoppetid mht. filtreringen $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$, så gælder for ethvert $t\geq 0$, at

$$(\tau = t) = (\tau\leq t)\setminus\big(\cup_{n\in\mathbb{N}}(\tau\leq t-\tfrac{1}{n})\big)\in\mathcal{M}_t. \tag{4.2}$$

Men omvendt vil (4.2) generelt ikke medføre (4.1).

4.3 Definition. Lad τ være en stoppetid mht. filtreringen $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$, og lad $\mathcal{M}_\infty$ betegne den mindste σ-algebra, som indeholder $\mathcal{M}_t$ for alle t. Vi definerer så:

$$\mathcal{M}_\tau = \{N\in\mathcal{M}_\infty \mid N\cap(\tau\leq t)\in\mathcal{M}_t \text{ for alle } t\}.$$

4.4 Opgave. Lad $\mathcal{M}_\tau$ være som i Definition 4.3. Vis, at $\mathcal{M}_\tau$ er en σ-algebra.

4.5 Definition. Lad τ være en stoppetid mht. filtreringen $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$, og lad (X_t) være en n-dimensional stokastisk proces, som er tilpasset mht. $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$. Vi definerer da afbildningen $X_\tau\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ ved:

$$X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega), \quad (\omega\in\Omega).$$

4.6 Lemma. *Lad τ være en stoppetid mht. filtreringen $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$, og lad (X_t) være en n-dimensional stokastisk proces, som er tilpasset mht. $(\mathcal{M}_t)_{t\geq 0}$. Hvis (X_t) er kontinuert, så er X_τ $\mathcal{M}_\tau$-målelig.*

Bevis. For simpelheds skyld skal vi antage, at τ kun antager værdier i en tællelig mængde $T \subseteq [0, \infty[$ (f.eks. $\mathbb{Q}_+$). I dette tilfælde får vi ikke engang brug for, at (X_t) er en kontinuert proces.

Lad H være en Borel mængde i $\mathbb{R}^n$. Vi skal vise, at $(X_\tau \in H) \in \mathcal{M}_\tau$, altså at

$$\forall t \geq 0\colon (X_\tau \in H) \cap (\tau \leq t) \in \mathcal{M}_t.$$

Vi finder, at

$$\begin{aligned}(X_\tau \in H) \cap (\tau \leq t) &= \bigcup_{s \in T} \big((X_\tau \in H) \cap (\tau = s) \cap (\tau \leq t)\big)\\ &= \bigcup_{s \in T} \big((X_s \in H) \cap (\tau = s) \cap (\tau \leq t)\big)\\ &= \bigcup_{s \in T, s \leq t} \big((X_s \in H) \cap (\tau = s)\big),\end{aligned}$$

og her gælder at

$$(X_s \in H) \cap (\tau = s) \in \mathcal{M}_s \subseteq \mathcal{M}_t,$$

for alle s i T, som opfylder at $s \leq t$. ■

Vi vender nu tilbage til at betragte et sandsynlighedsfelt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en m-dimensional Brownsk bevægelse (B_t) defineret på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Som altid betegner $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$ den fuldstændiggjorte filtrering genereret af $(B_t)_{t \geq 0}$.

4.7 Lemma. *Lad τ være en stoppetid mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \geq 0}$, og betragt processen $(\widehat{B}_t)_{t \geq 0}$ givet ved:*

$$\widehat{B}_t = B_{\tau + t} - B_\tau, \quad (t \geq 0).$$

Så er $(\widehat{B}_t)$ en Brownsk bevægelse, som er uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$.

Bevis. Vi skal igen antage at τ kun antager værdier i en tællelig mængde $T \subseteq [0, \infty[$. Bemærk først, at hvis $A \in \tilde{\mathcal{F}}_\tau$, så gælder at

$$A \cap (\tau = t) = A \cap (\tau \leq t) \setminus \Big(\bigcup_{s \in T, s < t} A \cap (\tau \leq s)\Big) \in \tilde{\mathcal{F}}_t,$$

for alle $t \geq 0$. Specielt er $A \cap (\tau = t)$ uafhængig af $B_{t+s} - B_t$ for alle $s, t \geq 0$ (jvf. Opgave 2.4). Vi finder derpå for vilkårlige $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ og $H_1, H_2, \ldots, H_k$ i $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, at

$$\begin{aligned}&P\big((\widehat{B}_{t_1} \in H_1, \widehat{B}_{t_2} \in H_2, \ldots, \widehat{B}_{t_k} \in H_k) \cap A\big)\\ &\quad= \sum_{t \in T} P\big((\widehat{B}_{t_1} \in H_1, \widehat{B}_{t_2} \in H_2, \ldots, \widehat{B}_{t_k} \in H_k) \cap A \cap (\tau = t)\big)\\ &\quad= \sum_{t \in T} P\big((B_{t+t_1} - B_t \in H_1, B_{t+t_2} - B_t \in H_2, \ldots, B_{t+t_k} - B_t \in H_k) \cap (A \cap (\tau = t))\big)\\ &\quad= \sum_{t \in T} P\big(B_{t+t_1} - B_t \in H_1, B_{t+t_2} - B_t \in H_2, \ldots, B_{t+t_k} - B_t \in H_k\big) P\big(A \cap (\tau = t)\big).\end{aligned}$$

For fast t er processen $(B_{t+s}-B_t)_{s\geq 0}$ som bekendt en Brownsk bevægelse (jvf. Opgave 2.4), og det følger derfor, at

$$\begin{aligned}
&P\big(B_{t+t_1}-B_t\in H_1, B_{t+t_2}-B_t\in H_2,\dots,B_{t+t_k}-B_t\in H_k\big)\\
&\qquad = P\big(B_{t_1}\in H_1, B_{t_2}\in H_2,\dots,B_{t_k}\in H_k\big).
\end{aligned}$$

Vi finder derfor, at

$$\begin{aligned}
&P\big((\widehat{B}_{t_1}\in H_1,\widehat{B}_{t_2}\in H_2,\dots,\widehat{B}_{t_k}\in H_k)\cap A\big)\\
&\qquad =\sum_{t\in T} P\big(B_{t_1}\in H_1, B_{t_2}\in H_2,\dots,B_{t_k}\in H_k\big)P\big(A\cap(\tau=t)\big) \qquad (4.3)\\
&\qquad = P\big(B_{t_1}\in H_1, B_{t_2}\in H_2,\dots,B_{t_k}\in H_k\big)P(A).
\end{aligned}$$

Sættes nu $A=\Omega$, så viser (4.3), at $(\widehat{B}_t)$ er en Brownsk bevægelse. Og for generelt A fra $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ følger dernæst, at

$$P\big((\widehat{B}_{t_1}\in H_1,\widehat{B}_{t_2}\in H_2,\dots,\widehat{B}_{t_k}\in H_k)\cap A\big)=P\big(\widehat{B}_{t_1}\in H_1,\widehat{B}_{t_2}\in H_2,\dots,\widehat{B}_{t_k}\in H_k\big)P(A),$$

hvilket viser, at $(\widehat{B}_t)$ er uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$. ■

4.8 Lemma. *Lad τ være en stoppetid mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$, og betragt den Brownske bevægelse $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ fra Lemma 4.7. Så har $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ uafhængige tilvækster mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$. Specielt er $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ en martingal mht. filtreringen $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+t})_{t\geq 0}$.*

Bevis. Vi bemærker først, at $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ er tilpasset mht. filtreringen $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+t})_{t\geq 0}$. Anvendes nemlig Lemma 4.6 på stoppetiderne $\tau+t$ og τ, så fremgår at $B_{\tau+t}$ er $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+t}$-målelig, og at B_τ er $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$-målelig og dermed $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+t}$-målelig. Dermed bliver også differencen $\widehat{B}_t=B_{\tau+t}-B_\tau$ $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+t}$-målelig.

Betragt nu s,t i $[0,\infty[$, hvor $s<t$, og bemærk at

$$\widehat{B}_t-\widehat{B}_s=B_{\tau+t}-B_{\tau+s}.$$

Anvendes nu Lemma 4.7 på stoppetiden $\tau+s$, så følger at processen $(B_{\tau+s+h}-B_{\tau+s})_{h\geq 0}$ er en Brownsk bevægelse, som er uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}$. Specielt er $B_{\tau+t}-B_{\tau+s}$ uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}$, og det følger så, at

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big\{\widehat{B}_t \mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}\big\} &= \mathbb{E}\big\{\widehat{B}_s+(\widehat{B}_t-\widehat{B}_s)\mid \tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}\big\}\\
&=\widehat{B}_s+\mathbb{E}\big\{\widehat{B}_t-\widehat{B}_s\mid\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}\big\}\\
&=\widehat{B}_s+\mathbb{E}\big\{\widehat{B}_t-\widehat{B}_s\big\}\\
&=\widehat{B}_s,
\end{aligned}$$

som ønsket. ■

4.9 Sætning. (Den stærke Markov-egenskab) *Lad* (X_t) *være en tidshomogen Itô diffussionsproces, dvs.* $(X_t) = (X_t^{0,x_0})$ *for et passende* x_0 *i* $\mathbb{R}^n$. *Lad videre* τ *være en stoppetid mht. filtreringen* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$. *For enhver begrænset Borel funktion* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *og et vilkårligt* $h \geq 0$ *gælder da, at*

$$\mathbb{E}\big\{f(X_{\tau+h}) \bigm| \tilde{\mathcal{F}}_\tau\big\} = \Psi_f(h, X_\tau) = \Psi_f(h,\cdot) \circ X_\tau, \quad \text{n.s.},$$

hvor $\Psi_f\colon [0,\infty[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *er defineret ved* (3.2).

Bevis. Beviset er analogt til beviset for Sætning 3.2. Betragt den Brownske bevægelse $(\widehat{B}_t)_{t\geq 0}$ fra Lemma 4.7. Ved en analog til Opgave 2.4 for stoppetider, finder vi nu for s i $[0,\infty[$,

$$\begin{aligned}
X_{\tau+s} &= x_0 + \int_0^{\tau+s} b(X_u)\,du + \int_0^{\tau+s} \sigma(X_u)\,dB_u \\
&= \Big(x_0 + \int_0^{\tau} b(X_u)\,du + \int_0^{\tau} \sigma(X_u)\,dB_u\Big) + \int_\tau^{\tau+s} b(X_u)\,du + \int_\tau^{\tau+s} \sigma(X_u)\,dB_u \\
&= X_\tau + \int_0^{s} b(X_{\tau+u})\,du + \int_0^{s} \sigma(X_{\tau+u})\,d\widehat{B}_u,
\end{aligned}$$

Bemærk at X_τ er uafhængig af $(\widehat{B}_s)_{s\geq 0}$, idet X_τ er $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$-målelig, og $(\widehat{B}_s)_{s\geq 0}$ er uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ ifølge Lemma 4.7. Ovenstående viser, at processen $(X_{\tau+s})_{s\geq 0}$ er en løsning til den stokastiske differentialligning:

$$\begin{cases} dY_s = b(Y_s)\,ds + \sigma(Y_s)\,d\widehat{B}_s, & s \geq 0, \\ Y_0 = X_\tau, \end{cases} \tag{4.4}$$

hvis man (i første omgang) ser bort fra betingelsen om, at løsningen skal være tilpasset mht. filtreringen

$$\mathcal{D}_s = \sigma\big(\{X_\tau\} \cup \{\widehat{B}_u \mid 0 \leq u \leq s\}\big) \vee \mathcal{N}, \qquad (s \geq 0).$$

Men $(X_{\tau+s})_{s\geq 0}$ er jo i hvert fald tilpasset mht. filtreringen $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s})_{s\geq 0}$ ifølge Lemma 4.6, og ifølge Lemma 4.8 er $(\widehat{B}_s)_{s\geq 0}$ en martingal mht. $(\tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s})_{s\geq 0}$. Bemærk også at $\mathcal{D}_s \subseteq \tilde{\mathcal{F}}_{\tau+s}$ for alle $s \geq 0$. Det følger derfor fra Bemærkning 1.2, at $(X_{\tau+s})_{s\geq 0}$ ér løsningen til (4.4), dvs. (modulo en nulmængde) $(X_{\tau+s})_{s\geq 0} = F_{b,\sigma}(X_\tau, (\widehat{B}_s))$.

Betragt nu et fast $h \geq 0$ og definér afbildningen $g\colon \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ ved:

$$g(x,\omega) = \big[F_{b,\sigma}(x, (\widehat{B}_s))\big](h,\omega), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \omega \in \Omega.$$

Ifølge ovenstående har vi så at

$$X_{\tau+h}(\omega) = g(X_\tau(\omega), \omega), \quad \text{for næsten alle } \omega.$$

Bemærk, at for ethvert x i $\mathbb{R}^n$ er $g(x,\cdot)$ målelig mht. $\sigma(\{\widehat{B}_s \mid s \geq 0\})$ og dermed uafhængig af $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$ (Lemma 4.7). Da $F_{b,\sigma}$ er kontinuert i første variabel (jvf. Sætning 1.1) fremgår videre, at for hvert fast ω i Ω er $g(\cdot,\omega)$ kontinuert på $\mathbb{R}^n$. Alle forudsætninger er således opfyldte for, at vi kan benytte Lemma 3.1 i tilfældet $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{F}}_\tau$ (husk, at X_τ er $\tilde{\mathcal{F}}_\tau$-målelig). For en vilkårlig begrænset Borel funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ finder vi således, at

$$\mathbb{E}\big\{f(X_{\tau+h}) \bigm| \tilde{\mathcal{F}}_\tau\big\} = \mathbb{E}\big\{f \circ g(X_\tau(\cdot),\cdot) \bigm| \tilde{\mathcal{F}}_\tau\big\} = \phi_{f\circ g} \circ X_\tau, \quad \text{n.s.} \tag{4.5}$$

Bemærk her, at for x i $\mathbb{R}^n$, har vi

$$\phi_{f\circ g}(x) = \mathbb{E}\{f \circ g(x,\cdot)\},$$

og her er

$$g(x,\cdot) = [F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))](h,\cdot).$$

Ifølge Sætning 1.1 har processerne $F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))$ og $F_{b,\sigma}(x,(B_t)) = (X_s^{0,x})_{s\geq 0}$ samme fordeling, så specielt har den stokastiske variabel $[F_{b,\sigma}(x,(\widehat{B}_t))](h,\cdot)$ samme fordeling som $[F_{b,\sigma}(x,(B_t))](h,\cdot) = X_h^{0,x}$. Dette medfører, at

$$\phi_{f\circ g}(x) = \mathbb{E}\{f \circ g(x,\cdot)\} = \mathbb{E}\{f(X_h^{0,x})\} = \Psi_f(h,x).$$

Indsættes dette i (4.5), opnås den ønskede formel. ■