Den Brownske Bevægelse

N.J. Nielsen

1 Notation

I dette notesæt vil vi generelt benytte samme notation som i det øvrige undervisningsmateriale i MM23. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ betegner $\mathcal{B}_n$ Borelalgebraen på $\mathbb{R}$, og hvis $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ er et sandsynlighedsrum, $X \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ en stokastisk variabel, lader vi $X(P)$ betegne fordelingsmålet (billedmålet) på $\mathbb{R}^n$ for X, dvs

$$X(P)(A) = P(X^{-1}(A)) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{B}_n. \tag{1.1}$$

Hvis $n \in \mathbb{N}$, lader vi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegne det indre produkt (prikproduktet) på $\mathbb{R}^n$, dvs for alle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og alle $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \tag{1.2}$$

Alle vektorrum, som optræder i disse noter, antages at være reelle, med mindre andet er nævnt.

Endelig vil vi lade $\boldsymbol{m}_n$ betegne Lebesguemålet på $\mathbb{R}^n$ og sætter $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1$.

2 Karakteristiske funktioner og normalfordelingen

Vi starter med følgende definition:

Definition 2.1 *Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad μ være et Borel-sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}^n$. Den karakteristiske funktion $\varphi_\mu \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ for μ er defineret ved:*

$$\varphi_\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y, x \rangle} d\mu(x) \quad \textit{for alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Følgende eksempel viser at der er en forbindelse mellem Fouriertransformen og karakteristiske funktioner.

Eksempel 2.2 *Lad* $h \in L_1(\mathbb{R})$, $h \geq 0$ *med* $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx = 1$. *Sæt*

$$\mu(A) = \int_A h(x)dx \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{B}. \tag{2.2}$$

Da gælder $\varphi_\mu(y) = \sqrt{2\pi}\hat{h}(-y)$ *for alle* $y \in \mathbb{R}$ *(*$\hat{h}$ *betegner Fouriertransformen).*

Vi har nemlig for alle $y \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\mu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} h(x)dx = \sqrt{2\pi}\hat{h}(-y). \tag{2.3}$$

I MM506 har vi vist følgende sætning i tilfældet $n = 1$.

Sætning 2.3 *Tilordningen* $\mu \to \varphi_\mu$ *er en-entydig.*

En klassisk sætning af Bochner giver sammen med Sætning 2.3, at tilordningen $\mu \to \varphi_\mu$ giver en en-entydig korrespondance mellem Borel-sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}^n$ og de kontinuerte, ikke-negativt definite funktioner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}$.

Definition 2.4 *Lad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *være et sandsynlighedsrum og lad* $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *være en stokastisk variabel. Den karakteristiske funktion* φ_X *for* X *defineres som* $\varphi_X = \varphi_{X(P)}$. *Dette giver*

$$\varphi_X(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle y,x\rangle} dX(P) = \int_\Omega e^{i\langle y,X\rangle} dP \tag{2.4}$$

for alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Det fremgår umiddelbart af Sætning 2.3 og Definition 2.4, at to n-dimensionale stokastiske variable (ikke nødvendigvis defineret på samme sandsynlighedsrum) har samme fordeling, hvis og kun hvis deres karakteristiske funktioner er ens.

Vi minder om, at en symmetrisk, reel $n \times n$ matrix C kaldes positiv definit, hvis

$$\langle Cx, x\rangle > 0 \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Vi vil nu definere og kort beskrive normalfordelte stokastiske variable. Vi får mest brug for det 1-dimensionale tilfælde, men i beviser som involverer uafhængighed er det ofte nødvendigt også at betragte flerdimensionale normalfordelinger. Vi indfører følgende definition

Definition 2.5 *Lad* C *være en symmetrisk, positiv definit* $n \times n$ *matrix og lad* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

En n*-dimensional stokastisk variabel* X *siges at være normalfordelt* $N(\xi, C)$, *hvis* X *har en tæthedsfunktion* f *givet ved*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}(x-\xi), x-\xi\rangle) \tag{2.6}$$

for alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel 2.6 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum og lad $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ være en stokastisk variabel, $\xi \in \mathbb{R}$ og $\sigma > 0$. X siges at være normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$, hvis X har en tæthedsfunktion f givet ved*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\xi)^2). \tag{2.7}$$

Det ses forholdsvis let at $EX = \xi$ og $VX = \sigma^2$.

For at retfærdiggøre definition 2.5 skal vi vise, at funktionen f givet ved (2.6) faktisk er en tæthedsfunktion, dvs $f \geq 0$ og $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\boldsymbol{m}_n = 1$. I MM506 har vi vist, at $f$givet ved (2.7) er en tæthedsfunktion i det 1-dimensionale tilfælde. Vi får brug for følgende lemma, som er velkendt fra MM501 og MM506:

Lemma 2.7 *Der gælder følgende formel*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{2.8}$$

Ved integraltransformation fås:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\xi)^2) dx = \sigma\sqrt{2\pi}. \tag{2.9}$$

Lemmaet giver umiddelbart, at funktionen f givet ved (2.7) er en tæthedsfunktion. For at vise at det også gælder i højere dimensioner får vi brug for lidt lineær algebra.

Sætning 2.8 *Funktionen f givet ved* (2.6) *er en tæthedsfunktion.*

Bevis: Lad os for simpelhedens skyld antage at $\xi = 0$. Da C og dermed C^{-1} er symmetrisk, har $\mathbb{R}^n$ en ortonormal basis $(e_j)_{j=1}^n$ bestående af egenvektorer for C^{-1}. Lad λ_j være egenværdien svarende til e_j. Da C^{-1} er positiv definit, ses det at $\lambda_j > 0$ for alle $1 \leq j \leq n$. For ethvert $x \in \mathbb{R}^n$ har vi

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \tag{2.10}$$

og dermed

$$C^{-1}x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j \tag{2.11}$$

og

$$\langle C^{-1}x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j \rangle^2. \tag{2.12}$$

Lad $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være defineret ved

$$Ux = (\langle x, e_j \rangle)_{j=1}^n \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

U er en isometri, da vi for alle $x \in \mathbb{R}^n$ har

$$\|Ux\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle^2 = \| \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j \|^2 = \|x\|^2,$$

og det er også let at se, at U er på. Da Lebesguemålet er rotationsinvariant er $U(\mathbf{m_n}) = \mathbf{m_n}$.Vi finder nu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}x, x\rangle) d\boldsymbol{m}_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j \rangle^2) d\boldsymbol{m}_n(x) \qquad (2.14)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (Ux)_j^2) d\boldsymbol{m}_n(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j^2) d\boldsymbol{m}_n(x)\\
&= \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}\lambda_j x_j^2) dx_j\\
&= (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\prod_{j=1}^{n} \lambda_j}}\\
&= (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\det C^{-1}}} = (2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C},
\end{aligned}$$

hvor vi ved det tredie lighedstegn har benyttet at Lebesguemålet $\boldsymbol{m}_n$ er rotationsinvariant (eller sagt på en anden måde: vi transformerer integralet med U, som har en Jacobiant med numerisk værdi 1), og ved det femte lighedstegn har benyttet Lemma 2.7. □

Beviset for den næste sætning overlades til læseren:

Sætning 2.9 *Lad $n \in \mathbb{N}$ og lad ξ og $C = (c_{jk})$ være som i Definition 2.5. Hvis $X = (X_j)_{j=1}^n$ er en n-dimensional stokastisk variabel, som er normaltfordelt $N(\xi, C)$, så gælder der:*

$$\begin{aligned}
EX &= \xi \qquad (2.15)\\
Cov(X_j, X_k) &= E(X_j - \xi_j)(X_k - \xi_k) = c_{jk} \qquad 1 \leq j, k \leq n. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Vi vil nu udregne den karakteristiske funktion for en normalfordelt stokastisk variabel. I fandt vi dette i dimension 1, se [3] eller sætning 2.11 nedenfor. I [3] viste vi også følgende lemma, som vi også her får brug for.

Lemma 2.10 *For ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2} dx = \sqrt{2\pi}. \qquad (2.17)$$

Bevis: Beviset kræver kompleks funktionsteori, så vi giver kun en skitse.

For ethvert $N \in \mathbb{N}$ lader vi R_N betegne rektanglet bestemt ved punkterne $-N, N, -N-iy$ og $N-iy$. Da funktionen $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ er holomorf i $\mathbb{C}$, vil

$$\int_{\partial R_N} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0, \tag{2.18}$$

hvor vi har integreret langs randen af rektanglet i positiv omløbsretning (mod uret). Integralet spaltes nu i kurveintegralerne langs de fire sider. Det ses umiddelbart, at integralerne langs de lodrette sider går mod 0 for $N \to \infty$. Sammen med (2.18) giver dette

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}. \tag{2.19}$$

$\square$

Vi starter med at finde den karakteristiske funktion for en en-dimensional normalfordelt stokastisk variabel.

Sætning 2.11 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, og $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ en stokastisk variabel. X er normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$, hvis og kun hvis*

$$\varphi_X(y) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 y^2} \cdot e^{iy\xi} \quad \textit{for alle } y \in \mathbb{R}. \tag{2.20}$$

Bevis: Lad først X være normalfordelt $N(0,1)$. Vi finder da

$$\begin{aligned}
\varphi_X(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dX(P)(x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
&= e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^{\frac{1}{2}y^2} dx \\
&= e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^2} dx = e^{-\frac{1}{2}y^2}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Antag nu at X er normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$ og sæt $Z = \frac{X-\xi}{\sigma}$, Da Z er normalfordelt $N(0,1)$ og $X = \xi + \sigma Z$, får vi af det ovenstående

$$\begin{aligned}
\varphi_X(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyX(w)} dP(w) \\
&= e^{i\xi y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\sigma Z} dP \\
&= e^{i\xi y} \varphi_Z(\sigma y) = e^{i\xi y} \cdot e^{-\frac{1}{2}y^2\sigma^2}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Antag derefter at φ_X er af formen (2.20) og lad Y være normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$. Ifølge det allerede viste vil $\varphi_Y = \varphi_X$, og af entydighedssætningen for karakteristiske funktioner fås nu, at X har samme fordeling som Y. $\square$

Vi vil nu vise den analoge sætning til Sætning 2.11 for flerdimensionale normalfordelinger.

Sætning 2.12 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, $n \in \mathbb{N}$ og $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ en stokastisk variabel. Hvis $\xi \in \mathbb{R}^n$ og C er en symmetrisk, positiv definit $n \times n$ matrix, så er X normalfordelt $N(\xi, C)$ hvis og kun hvis*

$$\varphi_X(y) = e^{i\langle \xi, y\rangle} \exp(-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle) \quad \textit{for alle } y \in \mathbb{R}^n. \tag{2.23}$$

Bevis: Lad først X være normalfordelt $N(0, C)$ og lad $(e_j)_{j=1}^n$, $(\lambda_j)_{j=1}^n$ og U være valgt som i Sætning 2.8. Ved benyttelse af (2.12) finder vi

$$\sqrt{\det C}(2\pi)^{n/2}\varphi_X(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, x\rangle) \exp(-\frac{1}{2}\langle C^{-1}x, x\rangle) d\boldsymbol{m}_n(x) \tag{2.24}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle y, e_j\rangle) \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, e_j\rangle^2) d\boldsymbol{m}_n(x)$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j}\langle y, e_j\rangle^2) \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_j}\langle x, e_j\rangle - i\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle y, e_j\rangle)^2) d\boldsymbol{m}_n(x)$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle) \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_j}(Ux)_j - i\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle y, e_j\rangle)^2) d\boldsymbol{m}_n(x)$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle) \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_j}x_j - i\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle y, e_j\rangle)^2) d\boldsymbol{m}_n(x)$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle) \prod_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_j}x_j - i\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\langle y, e_j\rangle)^2 dx_j$$

$$= \exp(-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle)(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det C}.$$

Vi har i de ovenstående regninger benyttet Lemma 2.7 og Lemma 2.10.

Hvis X er normalfordelt $N(\xi, C)$ så er $Z = X - \xi$ normalfordelt $N(0, C)$, så vi finder

$$\varphi_X(y) = \int_\Omega e^{i\langle y, X\rangle} dP = \int_\Omega e^{i\langle y, \xi + Z\rangle} dP = e^{i\langle \xi, y\rangle}\varphi_Z(y) = e^{i\langle \xi, y\rangle} e^{-\frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle} \tag{2.25}$$

for alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Resten af sætningen følger af entydighedssætningen for karakteristiske funktioner. $\square$

I det følgende vil vi kalde en n-dimensional stokastisk variabel X for normalfordelt, hvis der findes et $\xi \in \mathbb{R}^n$ og en ikke-negativ definit matrix C, så φ_X opfylder (2.23). Vi kræver så ikke længere, at C er invertibel. Denne generalisering af normalfordelte stokastiske variable har betydning, når vi betragter linearkombinationer og grænseværdier af (sædvanlige) normalfordelte stokastiske variable. Eksempelvis kan vi betragte en konstant $c \in \mathbb{R}$ som en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi c og varians 0.

Vi vil nu karakterisere n-dimensionale normalfordelte stokastiske variable ved egenskaberne af deres koordinatfunktioner.

Sætning 2.13 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, og lad $X_j\colon \Omega \to \mathbb{R}$ være stokastiske variable. Hvis $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, så er følgende to udsagn ækvivalente:*

(i) X er normalfordelt

(ii) Enhver linearkombination af X_j'erne er normalfordelt.

Bevis: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Lad X være normalfordelt $N(\xi, C)$, lad $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ og sæt $Y = \sum_{j=1}^n t_j X_j$. Vi skal vise, at Y er normalfordelt. Hvis $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, så ser vi straks, at $\langle t, X\rangle = Y$. Med denne observation får vi for ethvert $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(iyY)dP = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\langle yt, X\rangle)dP \\ &= \varphi_X(yt) = e^{iy\langle \xi, t\rangle} \exp(-\frac{1}{2}y^2\langle Ct, t\rangle). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sætning 2.11 giver nu, at Y er normalfordelt med middelværdi $\langle \xi, t\rangle$ og varians $\langle Ct, t\rangle$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). For ethvert $i \leq j,\ k \leq n$ sætter vi

$$c_{jk} = E(X_j - EX_j)(X_k - EX_k) \tag{2.27}$$

og lader $C = (c_{kj})$, $\xi = (EX_1, EX_2, \dots, EX_n)$. Vi vil vise, at X er normalfordelt $N(\xi, C)$.

Lad $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ være vilkårlig. Da $\langle y, X\rangle = \sum_{j=1}^n y_j X_j$, følger det af forudsætningerne, at $\langle y, X\rangle$ er normalfordelt med $E\langle y, X\rangle = \langle y, EX\rangle$ og varians

$$\begin{aligned} 0 \leq V(\langle y, X\rangle) &= E(\langle y, X - EX\rangle)^2 \\ &= E(\sum_{j=1}^n y_j(X_j - EX_j))^2 \\ &= \sum_{j=k} y_j y_k c_{jk} = \langle Cy, y\rangle. \end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.28) giver specielt at C er ikke-negativ definit.

Vi finder nu ved anvendelse af Sætning 2.11

$$\varphi_X(y) = \int_\Omega \exp(i\langle y, X\rangle)dP = \varphi_{\langle y,X\rangle}(1) = \exp(i\langle y, \xi\rangle - \frac{1}{2}\langle Cy, y\rangle), \tag{2.29}$$

hvilket ifølge Sætning 2.12 giver, at X er normalfordelt $N(\xi, C)$. $\square$

Hvis $\mathcal{N}$ er en familie af stokastiske variable på et sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, så kaldes elementerne i $\mathcal{N}$ for ukorrelerede, hvis $\mathrm{cov}(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY) = 0$ for alle $X, Y \in \mathcal{N}$. Det følger umiddelbart, at hvis $\mathcal{N}$ er uafhængig, så er elementerne i $\mathcal{N}$ ukorrelerede. Vi skal nu se, at det omvendte gælder for visse mængder af normalfordelte stokastiske variable.

Sætning 2.14 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum og lad $X_j \colon \Omega \to \mathbb{R}$ være stokastiske variable, så $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ er normalfordelt. Hvis $X_j$erne er ukorrelerede, er de uafhængige.*

Bevis: Lad $\xi \in \mathbb{R}^n$ og C være covariansmatricen for X. Af forudsætningen følger at det er en diagonalmatrix med $\sigma_j^2 = (V(X_j)$ i diagonalen. Hvis f betegner tæthedsfunktionen for X, og f_j betegner tæthedsfunktionen for X_j, $1 \le j \le n$, så er

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^{n} (\frac{1}{\sigma_j}) \exp(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (\frac{x_j}{\sigma_j})^2) = \prod_{j=1} f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.30}$$

hvor vi har benyttet Sætning 2.13 til at slutte at X_j er normalfordelt for ethvert $1 \le j \le n$. (2.30) viser, at $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ er uafhængigt. $\square$

Hvis vi kombinerer Sætning 2.13 med det foregående får vi

Sætning 2.15 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og lad $\mathcal{M} \subseteq L_2(P)$ være et underrum, således at ethvert $Y \in \mathcal{M}$ er normalfordelt. Hvis $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ er en delmængde, hvis elementer er ukorrelerede, så er $\mathcal{N}$ uafhængig.*

Bevis: Lad $n \in \mathbb{N}$ og $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathcal{N}$, og sæt $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Da enhver linearkombination af $X_j$erne tilhører $\mathcal{M}$, er X normalfordelt ifølge Sætning 2.13. Da $X_j$erne er ukorrelerede, er de uafhængige ifølge Sætning 2.14. Dette viser at $\mathcal{N}$ er uafhængig. $\square$

Dette giver følgende nyttige korollar.

Korollar 2.16 *Lad $\mathcal{M} \subseteq L_2(P)$ være som i Sætning 2.15, og lad $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ være en delmængde, hvis elementer alle har middelværdi 0. $\mathcal{N}$ er da uafhængig, hvis og kun hvis det er en ortogonalmængde.*

Vi nævner også følgende velkendte sætning.

Sætning 2.17 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum og $X_j \colon \Omega \to \mathbb{R}$ uafhængige, normalfordelte stokastiske variable. Da gælder*

(i) $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ er normalfordelt.

(ii) Enhver linearkombination af $X_j$erne er normalfordelt.

Bevis: (i) følger ved direkte udregning, og (ii) følger af (i) ved benyttelse af Sætning 2.13. $\square$

Vi slutter dette afsnit med følgende sætning, som vi ofte skal benytte i det følgende:

Sætning 2.18 *Lad $(X_k) \subseteq L_2(P)$ være en følge af normalfordelte stokastiske variable. Hvis $X_k \to X$ i $L_2(P)$, så er X normalfordelt.*

Bevis: For ethvert $k \in \mathbb{N}$ sætter vi $\xi_k = EX_k$, $\sigma_k^2 = V(X_k)$, $\xi = E(X)$, og $\sigma^2 = V(X)$. Da $X_k \to X$ i $L_2(P)$, finder bi

$$\xi_k = E(X_k) \to E(X) = \xi \tag{2.31}$$

og

$$\sigma_k^2 = E(X_k - E(X_k))^2 \to E(X - E(X)) = \sigma^2. \tag{2.32}$$

Vi vil vise, at X er normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$. For ethvert $y \in \mathbb{R}$ finder vi

$$\begin{aligned} |\varphi_X(y) - \varphi_{X_k}(y)| &\leq \int_\Omega |e^{iyX} - e^{iyX_k}| dP \qquad (2.33) \\ &\leq |y| \int_\Omega |X_k - X| dP \leq |y| \|X_k - X\|_2 \to 0 \quad \text{for } k \to \infty \end{aligned}$$

således at $\varphi_{X_k}(y) \to \varphi_X(y)$ for alle $y \in \mathbb{R}$.

Da X_k er normalfordelt $N(\xi_k, \sigma_k^2)$, giver Sætning 2.11 at der for ethvert $y \in \mathbb{R}$ gælder

$$\varphi_{X_k}(y) = \exp(iy\xi_k - \frac{1}{2}\sigma_k^2 y^2) \to \exp(iy\xi - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2). \tag{2.34}$$

Dette viser, at

$$\varphi_X(y) = \exp(iy\xi - \frac{1}{2}\sigma^2 y^2) \quad \text{for alle } y \in \mathbb{R}, \tag{2.35}$$

således at X er normalfordelt $N(\xi, \sigma^2)$. $\square$

Bemrkning: I Sætning 2.18 kan det sagtens forekomme at $\sigma = 0$ således at X er en konstant. Ved at kombinere Sætning 2.18 med Sætning 2.13 er det let at få en flerdimensionel version af Sætning 2.18. Denne version kan dog også let fås direkte.

3 Den Brownske bevægelse

I dette afsnit vil vi vise eksistensen af den vigtige stokastiske proces, som nu kaldes den Brownske bevægelse, og undersøge dens basale egenskaber.

Processen er opkaldt efter botanikeren Brown, som i 1828 observerede, at når han opslemmede blomsterpollen i vand, så bevægede pollenkornene sig på en tilsyneladende tilfældig måde, hvor de hele tiden skiftede retning (prøv selv!). Dette fænomen forklarede han (korrekt) ved kornenes sammenstød med vandmolekyler, men har ellers ikke medvirket til udvikling af den matematiske teori for denne proces.

Det første forsøg på at give en matematisk definition af processen blev gjort af franskmanden Bachelier, som i slutningen af det 19. århundrede prøvede at give en statistisk beskrivelse af de tilfældige kursudsving på aktiebørsen i Paris. Den første præcise matematiske definition blev givet af Norbert Wiener i 1923, og processen kaldes derfor også ofte for Wienerprocessen.

Siden da har den Brownske bevægelse spillet en stor rolle inden for ren matematik, anvendt matematik og fysik, hvor den især benyttes i Einsteins relativitetsteori.

I matematisk finansieringsteori spiller den Brownske bevægelse en altdominerende rolle, idet den er den genererende proces for næsten alle matematiske finansieringsmodeller. Dette er også tilfældet for Black-Scholes modellen, der som bekendt indbragte Nobelprisen i økonomi til skaberne.

I det følgende lader vi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et fast sandsynlighedsrum.

Vi starter med følgende definition:

Definition 3.1 *En stokastisk proces i kontinuert tid er en familie $(X_t)_{t\geq 0}$ af reelle stokastiske variable, defineret på et sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

Ved en stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ vil det ofte forekomme at vi kun betragter X_t for t i et interval $[0, R]$.

Vi får brug for følgende definition:

Definition 3.2 *Lad $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ være en familie af del-σ-algebraer af $\mathcal{F}$, således at $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ for alle $s \leq t$. En stokastisk proces $(X_t)_{t\geq 0}$ kaldes tilpasset, hvis X_t er $\mathcal{F}_t$-målelig for ethvert $t \geq 0$.*

Definition 3.3 *Lad $(\mathcal{F}_t)$ være som i Definition 3.2, og lad $(X_t) \subseteq L_1(P)$ være en $(\mathcal{F}_t)$-tilpasset proces. (X_t) siges at være en submartingale, hvis*

$$X_s \leq E(X_t|\mathcal{F}_s) \quad \textit{for alle } s < t. \tag{3.1}$$

Hvis der for alle $s < t$ gælder lighedstegn i (3.1), kaldes (X_t) en martingale. (X_t) kaldes en supermartingale hvis $(-X_t)$ er en submartingale.

I MM513 har vi udviklet en teori om følger af stokastiske variable, som er martingales. Mange af vore resultater kan umiddelbart overføres til kontinuert tid. Man skal dog passe på, når det gælder konvergenssætninger og resultater, som omhandler stoptider.

Følgende definition er vigtig.

Definition 3.4 *En proces (X_t) på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ kaldes kontinuert, hvis der for n.a. $\omega \in \Omega$ gælder at funktionen $t \to X_t(\omega)$ er kontinuert i t.*

En proces (Y_t) siges at have en kontinuert version hvis der findes en kontinuert proces (X_t) således at $P(X_t = Y_t) = 1$ for alle $t \geq 0$. Hvis (X_t) er en proces på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, så kaldes funktionerne $t \to X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, for processens udfaldsfunktioner.

Det er nu på tide at definere den Brownske bevægelse.

Definition 3.5 *En reel stokastisk proces (B_t) kaldes en Brownsk bevægelse startende i 0 med drift ξ og varians σ^2, hvis følgende betingelser er opfyldt:*

(i) $P(B_0 = 0) = 1$

(ii) For alle $0 \leq s < t$ er $B_t - B_s$ normalfordelt $N((t-s)\xi, (t-s)\sigma^2)$.

(iii) For alle $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots t_n$ er $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ indbyrdes uafhængige. (B_t) kaldes en normeret Brownsk bevægelse hvis $\xi = 0$ og $\sigma^2 = 1$.

(B_t) kaldes en normeret Brownsk bevægelse hvis $\xi = 0$ og $\sigma^2 = 1$.

Den væsentligste opgave i dette afsnit er selvfølgelig at vise eksistensen af den Brownske bevægelse, dvs vi skal vise, at der findes et sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en proces (B_t) på dette rum, som opfylder betingelserne i Definition 3.5. Det er selvfølgelig tilstrækkeligt at vise eksistensen af en normeret Brownsk bevægelse (B_t), thi så er $(\xi t + \sigma B_t)$ en Brownsk bevægelse med drift ξ og varians σ^2. Vi skal faktisk vise et stærkere resultat, nemlig at den Brownske bevægelse har en kontinuert version. Når vi i det følgende taler om en Brownsk bevægelse (eller den Brownske bevægelse) vil vi altid tænke på en normeret Brownsk bevægelse.

Vi skal benytte Hilbertrumsteori til konstruktionen og får brug for etpar sætninger om isometrier.

I det følgende vil $(\cdot, \cdot)$ henholdsvis $\| \cdot \|$ betegne det indre produkt henholdsvis normen i et vilkårligt Hilbertrum H. Hvis vi betragter forskellige Hilbertrum samtidigt, er det selvfølgelig lidt misbrug af notation at bruge samme betegnelser for de indre produkter og normerne i disse rum, men det er sædvane, og det letter notationen.

Vi minder om polarisationsformlen

Lemma 3.6 *hvis H er et reelt vektorrum, så gælder:*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \quad \textit{for alle } x, y \in H. \tag{3.2}$$

Hvis H er et komplekst vektorrum, så gælder

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2). \tag{3.3}$$

Bevis: Regn højresiderne ud! □

Definition 3.7 *Lad H_1 og H_2 være Hilbertrum. En lineær afbildning $T\colon H_1 \to H_2$ kaldes en isometri, hvis $\|Tx\| = \|x\|$ for alle $x \in H_1$.*

Ved hjælp af Lemma 3.6 får vi

Proposition 3.8 *Lad H_1 og H_2 være Hilbertrum, og $T\colon H_1 \to H_2$ en lineær afbildning. Følgende udsagn er ækvivalente*

(i) T er en isometri.

(ii) $(Tx, Ty) = (x, y)$ for alle $x, y \in H_1$.

Bevis: (i) $\implies$ (ii). Brug polarisationsformlen på (x, y) og (Tx, Ty).

(ii) $\implies$ (i). Sæt $y = x$. □

Vi bemærker, at det følger af Proposition 3.8, at hvis $T\colon H_1 \to H_2$ er en isometri, og $x, y \in H_1$ er ortogonale, så er Tx og Ty også ortogonale.

Den næste sætning viser, hvordan vi kan konstruere isometrier.

Sætning 3.9 *Lad H_1 være et Hilbertrum med en ortonormal basis (e_n) og lad (f_n) være en ortonormalfølge i et Hilbertrum H_2. Afbildningen $T\colon H_1 \to H_2$ defineret ved*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) f_n \quad \text{for alle } x \in H_1 \tag{3.4}$$

er en isometri af H_1 ind i H_2.

Bevis: Vi må først vise, at T er veldefineret, dvs vi skal vise, at rækken i (3.4) er konvergent for ethvert $x \in H_1$.

Lad dertil $x \in H_1$ være vilkårlig. Da (e_n) er en ortonormalfølge, vil $\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2 < \infty$, og da (f_n) er en ortonormalfølge, vil $\sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) f_n$ være konvergent i H_2, således at T er veldefineret. T er klart lineær, da det indre produkt er lineært i første variabel. Vi finder desuden:

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = \|x\|^2, \tag{3.5}$$

hvilket viser at T er en isometri. □

Den næste definition er ny:

Definition 3.10 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum. Et lukket underrum $\mathcal{H} \subseteq L_2(P)$ kaldes et Gaussisk Hilbertrum, hvis ethvert $f \in \mathcal{H}$ er normalfordelt med middelværdi 0.*

Bemrkning: I Definition 3.10 skal nulfunktionen tænkes på som normalfordelt med varians 0!

Den næste sætning, som er en af hovedsætningerne, viser, at eksistensen af uendeligt dimensionale Gaussiske Hilbertrum er ækvivalent med eksistensen af Brownske bevægelser.

Sætning 3.11 *(i) Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrym, således at der findes et uendeligt dimensionalt Gaussisk Hilbertrum $\mathcal{H} \subseteq L_2(P)$. Da eksisterer der isometrier fra $L_2(0,\infty)$ til $\mathcal{H}$, og hvis $T\colon L_2(0,\infty) \to \mathcal{H}$ er en vilkårlig isometri, og vi sætter*

$$B_t = T(1_{[0,t]}) \quad \text{for alle } t \in [0,\infty[, \tag{3.6}$$

så er (B_t) en Brownsk bevægelse.

(ii) Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, hvorpå der findes en Brownsk bevægelse. Da findes et uendeligt dimensionalt Gaussisk Hilbertrum $\mathcal{H} \subseteq L_2(P)$ og en isometri $T\colon L_2(0,\infty) \to \mathcal{H}$, så (3.6) gælder.

Bevis:

(i) Da $L_2(0,\infty)$ er et separabelt Hilbertrum, har det en ortonormal basis (f_n), og da $\mathcal{H}$ er uendeligt dimensionalt, kan vi finde en ortonormalfølge $(g_n) \subseteq \mathcal{H}$ (bemærk, at alle g_n'erne er normalfordelte $N(0,1)$ og uafhængige ifølge Korollar 2.16). Ifølge Sætning 3.9 findes der en isometri S af $L_2(0,\infty)$ ind i $\mathcal{H}$, således at $Sf_n = g_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad nu $T\colon L_2(0,\infty) \to L_2(P)$ være en vilkårlig isometri og definer (B_t) ved (3.6). Vi skal vise, at betingelserne (i)–(iii) er opfyldte. Da $0 = T(0) = B_0$, er det klart at (i) gælder. Lad dernæst $0 \le s < t$. Da $B_t - B_s \in \mathcal{H}$, er den normalfordelt med middelværdi 0. Vi har endvidere:

$$\int_\Omega (B_t - B_s)^2 dP = \|B_t - B_s\|_2^2 = \|T(1_{]s,t]})\|_2^2 = \|1_{]s,t]}\|_2^2 = (t-s), \tag{3.7}$$

hvilket viser at $B_t - B_s$ har varians $(t-s)$.

Lad dernæst $0 \le t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$. Da $\{1_{[0,t_1]}, 1_{]t_1,t_2]}, \ldots, 1_{]t_{n-1},t_n]}\}$ er en ortogonalmængde, følger det af Proposition 3.8, at $\{T(1_{[0,t_1]}), T(1_{]t_1,t_2]}), \ldots, T(1_{]t_{n-1},t_n]})\}$ er en ortogonalmængde, dvs at $\{B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}\}$ er en ortogonalmængde. Det følger nu af Korollar 2.16, at $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ er indbyrdes uafhængige. Dette viser (i).

(ii). Antag dernæst, at $(B_t)_{t\ge 0}$ er en Brownsk bevægelse på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, og sæt $\mathcal{H} = \overline{\text{span}}\{B_t \mid t \ge 0\} \subseteq L_2(P)$. Vi vil først vise at $\mathcal{H}$ er et Gaussisk Hilbertrum. Da alle B_t'erne har middelværdi 0, gælder det samme for alle elementer i $\mathcal{H}$. Lad først $g \in \text{span}\{B_t\}$.

Vi kan da finde $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ og $(\alpha_j)_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}$, således at $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j B_{t_j}$. Hvis vi sætter $\beta_j = \sum_{k=j}^n \alpha_k$ for alle $1 \le j \le n$, ses det at

$$g = \sum_{j=1}^n \beta_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \quad (B_{t_0} = 0). \tag{3.8}$$

Da B_{t_1}, $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n - B_{t_{n-1}}}$ er indbyrdes uafhængige, følger det af Sætning 2.17 at g er normalfordelt.

Lad nu $g \in \mathcal{H}$ være vilkårlig. Vi kan da finde en følge $g_n \subseteq \text{span}\{B_t\}$, så $g_n \to g$ i $L_2(P)$. Det ovenstående giver sammen med sætning 2.18 at g er normalfordelt, og vi har dermed vist at $\mathcal{H}$ er et Gaussisk Hilbertrum.

Vi skal nu konstruere den ønskede isometri. Lad $\mathcal{S} \subseteq L_2(0,\infty)$ være mængden af trappefunktioner. Hvis $f \in \mathcal{S}$ kan vi finde $0 = t_0 < t_2 < \cdots < t_n$ og $(\alpha_j)_{j=}^{n} \subseteq \mathbb{R}$, så

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{]t_{j-1},t_j]}, \tag{3.9}$$

og vi sætter

$$Sf = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}). \tag{3.10}$$

Det overlades til læseren at vise at S er en veldefineret lineær afbildning fra $\mathcal{S}$ til $\mathcal{H}$. Hvis f opfylder (3.9), så gælder

$$\|Sf\|_2^2 = \|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 \|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 (t_j - t_{j-1}) = \|f\|_2^2, \tag{3.11}$$

hvilket viser at $S\colon \mathcal{S} \to \mathcal{H}$ er en isometri. Vi vil nu udvide S til en isometri $T\colon L_2(0,\infty) \to \mathcal{H}$.

Lad $f \in L_2(0,\infty)$. Da $\mathcal{S}$ er tæt i $L_2(0,\infty)$, kan vi finde en følge $(f_n) \subseteq \mathcal{S}$, så $f_n \to f$ i $L_2(0,\infty)$. Hvis $n, m \in \mathbb{N}$, så følger det af (3.11), at

$$\|Sf_n - Sf_m\|_2 = \|S(f_n - f_m)\|_2 = \|f_n - f_m\|_2, \tag{3.12}$$

hvilket viser, at (Sf_n) er en Cauchyfølge i $\mathcal{H}$, og der findes derfor et $F \in \mathcal{H}$, således at $Sf_n \to F$ i $L_2(P)$. For at kunne definere $Tf = F$, må vi vise, at F ikke afhænger af den valgte følge (f_n). Lad dertil $(h_n) \subseteq \mathcal{S}$, så $h_n \to f$ i $L_2(0,\infty)$. Af det ovenstående følger, at $\lim_{n\to\infty} Sh_n$ eksisterer i $\mathcal{H}$. Vi definerer nu følgen $(u_k) \subseteq \mathcal{S}$ ved

$$u_{2n-1} = f_n, \quad u_{2n} = h_n \quad \text{for alle } n = 1, 2, \dots. \tag{3.13}$$

Det er klart at $u_k \to f$ i $L_2(0,\infty)$, og igen viser det ovenstående, at $\lim_{h\to\infty} Su_k$ eksisterer i $\mathcal{H}$. Da både (Sf_n) og (Sh_n) er delfølger af (Su_k), må der gælde

$$F = \lim_{n\to\infty} Sf_n = \lim_{k\to\infty} Su_k = \lim_{n\to\infty} Sh_n, \tag{3.14}$$

således at F ikke afhænger af den valgte følge (f_n). Vi kan nu sætte $Tf = F$. Det ses let, at T er en lineær afbildning fra $L_2(0,\infty)$ til $\mathcal{H}$, således at $Tf = Sf$ for alle $f \in \mathcal{S}$. Hvis $f \in L_2(0,\infty)$, og $(f_n) \subseteq \mathcal{S}$ igen er valgt, så $f_n \to f$ i $L_2(0,\infty)$, så følger det af (3.11), at

$$\|Tf\|_2 = \lim_n \|Sf_n\|_2 = \lim_n \|f_n\|_2 = \|f\|_2, \tag{3.15}$$

således at T er en isometri. Det følger direkte af (3.10) at $T(1_{[0,t]}) = B_t$ for alle $t \geq 0$. $\square$

Bemrkning: Hvis (B_t) er en Brownsk bevægelse, T er den tilhørende isometri og $f \in L_2(0, \infty)$, så kaldes Tf for Ito-integralet af den deterministiske funktion f med hensyn til B_t og betegnes $\int f dB_t$. Ordet deterministisk udtrykker at f kun afhænger af tidsvariablen t. Itointegralet kan udvides til visse funktioner $f(t, \omega)$, $t \geq 0$ og $\omega \in \Omega$. At vi taler om et integral, skyldes konstruktionen af T i Sætning 3.11, (ii), som jo minder om den måde, man konstruerer integraler på. Itointegralet spiller en stor rolle i matematisk finansiering.

Eksistensen af uendeligt dimensionale Gaussiske Hilbertrum følger af den næste sætning.

Sætning 3.12 *Der findes et sandsynlighedsrum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og en følge $(g_n) \subseteq L_2(P)$ bestående af uafhængige stokastiske variable, som alle er normalfordelte $N(0, 1)$. $\overline{\text{span}}(g_n)$ er et Gaussisk Hilbertrum.*

Bevis: Eksistensen af $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og (g_n) blev vist i MM506, se [3] og [4]. Faktisk fandt vi, at vi kunne sætte $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}, \boldsymbol{m}_1)$. At $\overline{\text{span}}(g_n)$ er et Gaussisk Hilbertrum følger direkte af Sætning 2.17 og Sætning 2.18. $\square$

Den næste sætning samler vore hidtidige resultater, men giver også ny information.

Sætning 3.13 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, således at der findes en følge $(g_n) \subseteq L_2(P)$ som i Sætning 3.12. Da findes der en Brownsk bevægelse på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Mere specifikt: Hvis (f_n) er en vilkårlig ortonormal basis for $L_2(0, \infty)$, så konvergerer rækken*

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(s) ds \, g_n \quad t \geq 0 \tag{3.16}$$

i $L_2(P)$ og n.s. for alle $t \geq 0$. (B_t) er en Brownsk bevægelse på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Bevis: Det følger direkte af sætning 3.11 og 3.12, at der findes en Brownsk bevægelse på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Da (f_n) er en ortonormal basis for $L_2(0, \infty)$, findes der ifølge Sætning 3.9 en isometri $T\colon L_2(0, \infty) \to L_2(P)$, så $Tf_n = g_n$. T er givet ved

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) f_n(s) ds \, g_n, \tag{3.17}$$

hvor rækken konvergerer i $L_2(P)$. Ifølge Sætning 3.11 er $B_t = T(1_{[0,t]})$ en Brownsk bevægelse, og ved indsættelse i (3.17) fås

$$B_t = T(1_{[0,t]}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(s) ds \, g_n \quad \text{for alle } t \geq 0. \tag{3.18}$$

Da alle summens led har middelværdi 0, og

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\int_0^t f_n(s) ds \, g_n\right)^2 = \|B_t\|_2^2 = t < \infty, \tag{3.19}$$

giver [1], Korollar 2.3, eller [4], Sætning 12.2, at rækken i (3.18) konvergerer n.s. for ethvert $t \geq 0$. $\square$

Vi vil nu vise, at der findes en kontinuert version af den Brownske bevægelse, og da har vi ikke som hidtil frit valg af den ortonormale basis for $L_2(0,\infty)$. Vi vil konstruere en ortonormal basis (f_n) for $L_2(0,\infty)$ med den egenskab, at der findes et $A \in \mathcal{F}$ med $P(A) = 1$, således at hvis $\omega \in A$, så konvergerer rækken (3.16) mod $B_t(\omega)$ uniformt i t på ethvert kompakt delinterval af $[0,\infty[$. Dette vil give, at $t \to B_t(\omega)$ er kontinuert for alle $\omega \in A$, idet hvert led i rækken (3.16) jo er kontinuert i t. Konstruktionen af (f_n) er baseret på Haarsystemet med hjælp af Borel-Cantelli lemmaet.

I det følgende lader vi $(\tilde{h}_m)$ være Haarsystemet som defineret i opgaverne, dvs.

$$\tilde{h}_1(t) = 1 \quad \text{for alle } t \in [0,1]. \tag{3.20}$$

For alle $k = 0,1,2,\ldots$ og $\ell = 1,2,\ldots,2^k$ sættes

$$\tilde{h}_{2^k+\ell}(t) = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad t \in [(2\ell-2)2^{-k-1}, (2\ell-1)2^{-k-1}[\\ -1 & \text{hvis} \quad t \in [(2\ell-1)2^{-k-1}, 2\ell \cdot 2^{-k-1}[\\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vi normerer dette system i $L_2(0,1)$ og sætter

$$h_1 = \tilde{h}_1 \qquad h_{2^k+\ell} = 2^{k/2}\tilde{h}_{2^k+\ell} \quad \text{for alle } k = 0,1,2,\ldots \text{ og } \ell = 1,2,3,\ldots,2^k. \tag{3.21}$$

Det følger af den obligatoriske opgave i MM513, at (h_m) er en ortonormal basis for $L_2(0,1)$. Det følger af Sætning 3.13, at hvis $(\Omega,\mathcal{F},P)$ er et sandsynlighedsrum, således at der findes en følge $(g_n) \subseteq L_2(P)$ som i Sætning 3.12, så er

$$B_t = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t h_m(s)ds\, g_m \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{3.22}$$

en Brownsk bevægelse for $t \in [0,1]$. Rækken konvergerer i $L_2(P)$ og n.s., og det samme gælder, hvis vi omordner ledene; vi skal dog gøre opmærksom på, at den mængde med mål 1, hvorpå rækken konvergerer punktvis, afhænger af omordningen, og for ikke at komme i vanskeligheder med nulmængder vil vi fastlægge en rækkefølge. Vi skriver

$$B_t = \int_0^t h_1(s)ds\, g_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \int_0^t h_m(s)ds\, g_m \overset{def}{=} \sum_m{}^* \int_0^t h_m(s)ds\, g_m \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq 1. \tag{3.23}$$

Vi kan nu vise

Sætning 3.14 $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ *givet ved* (3.23) *er en kontinuert Brownsk bevægelse.*

I beviset for sætningen får vi brug for følgende lemmaer:

Lemma 3.15 *For alle $k \geq 0$ gælder $0 \leq \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \int_0^t h_m(s)ds \leq 2^{-k/2-1}$.*

Bevis: For ethvert $2^k < m \leq 2^{k+1}$ sætter vi $S_m(t) = \int_0^t h_m(s)ds$ for alle $0 \leq t \leq 1$. Hvis $m = 2^k + \ell$, $1 \leq \ell \leq 2^k$, så følger det direkte af definitionen på h_m, at grafen for S_m er en trekant centreret i $(2\ell - 1)2^{-k-1}$ og med højde $2^{-k/2-1}$. For forskellige ℓ overlapper disse trekanter ikke. Dette viser påstanden. □

Lemma 3.16 *For alle $k \geq 0$ sætter vi*

$$G_k(\omega) = \max\{|g_m(\omega)| \mid 2^k < m \leq 2^{k+1}\} \quad \textit{for alle } \omega \in \Omega. \tag{3.24}$$

Der findes en delmængde $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ med $P(\tilde{\Omega}) = 1$, således at der for ethvert $\omega \in \tilde{\Omega}$ findes et $k(\omega)$, således at $G_k(\omega) \leq k$ for alle $k \geq k(\omega)$.

Bevis: For ethvert $x > 0$ finder vi

$$P(|g_m| > x\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2}du \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-u^2/2}du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-1}e^{-x^2/2}, \tag{3.25}$$

hvilket giver:

$$P(G_k > k) = P(\bigcup_{m=2^k+1}^{2^k+1} (|g_m| > k)) = 2^k P(|g_1| > k) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \cdot 2^k e^{-k^2/2}. \tag{3.26}$$

Da

$$\sum_{k=1}^\infty P(G_k > k) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^\infty k^{-1} 2^k e^{-k^2/2} < \infty,$$

følger det af Borel-Cantelli lemmaet, at $P(G_k \leq k\, f.v.t.) = 1$. Med $\tilde{\Omega}$ lig denne mængde følger påstanden. □

Bevis for Sætning 3.14: Lad $\tilde{\Omega}$ være som i Lemma 3.16 og lad $\omega \in \tilde{\Omega}$. Der findes da et $k(\omega) \geq 1$, således at $G_k(\omega) \leq k$ for alle $k \geq k(\omega)$. Hvis $k \geq k(\omega)$ er fast, så finder vi for alle $0 \leq t \leq 1$

$$\sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} |\int_0^t h_m(s)ds \cdot g_m(\omega)| \leq \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \int_0^t h_m(s)ds \cdot G_k(\omega) \leq k\, 2^{-k/2-1}. \tag{3.27}$$

Da $\sum_{k=1}^\infty k\, 2^{-k/2-1} < \infty$, følger det, at rækken $\sum_{k=k(\omega)}^\infty \sum_{m=2^k+1}^{2^{k+1}} \int_0^t h_m(s)dsg_m(\omega)$ konvergerer uniformt for $t \in [0,1]$. Dette viser at rækken

$$B_t(\omega) = \sum_m * \int_0^t h_m(s)dsg_m(\omega) \tag{3.28}$$

konvergerer uniformt for $t \in [0,1]$. Da funktionen S_m er kontinuert, følger det at $t \to B_t(\omega)$ er kontinuert. $\square$

For at finde en kontinuert Brownsk bevægelse på $[0,\infty[$ definerer vi funktionerne $h_{nm} \in L_2(0+,\infty)$ ved

$$h_{nm}(t) = \begin{cases} h_m(t-(n-1)) & \text{for } t \in [n-1,n] \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \tag{3.29}$$

og bemærker, at for ethvert $n \in \mathbb{N}$ er $(h_{nm})_{m=1}^{\infty}$ en ortonormal basis for $L_2(n-1,n)$, hvilket viser, at (h_{nm}) er en ortonormal basis for $L_2(0,\infty)$. Vi har følgende sætning:

Sætning 3.17 *Lad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, hvorpå der findes en følge af $N(0,1)$-fordelte stokastiske variable, og lad (g_{nm}) være en sådan. Definer*

$$B_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_m {}^* \int_0^t h_{nm}(s)ds\, g_{nm} \quad \textit{for alle } t \geq 0. \tag{3.30}$$

Da er $(B_t)_{t\geq 0}$ en kontinuert Brownsk bevægelse.

Bevis: Lad $n_0 \in \mathbb{N}$. For ethvert $t \in [n_0, n_0+1]$ finder vi

$$B_t(\omega) - B_{n_0}(\omega) = \sum_m {}^* \int_{n_0}^t h_{n_0 m}(s)ds\, g_{n_0 m}(\omega) \quad \text{for alle } \omega \in \Omega. \tag{3.31}$$

Ifølge Sætning 3.14 findes der en mængde $\tilde{\Omega}_n \subseteq \Omega$ med $P(\tilde{\Omega}_{n_0}) = 1$, så rækken (3.31) konvergerer uniformt på $[n_0, n_0+1]$ for ethvert $\omega \in \tilde{\Omega}_{n_0}$. Dette giver, at $t \to B_t(\omega)$ er kontinuert på $[n_0, n_0+1]$ for alle $\omega \in \tilde{\Omega}_{n_0}$. Sættes $\tilde{\Omega} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n$, så er $P(\tilde{\Omega}) = 1$, og hvis $\omega \in \tilde{\Omega}$, så vil $t \to B_t(\omega)$ være kontinuert på $[0,\infty[$. $\square$

Lad nu (B_t) være en Brownsk bevægelse og lad for ethvert $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ betegne σ-algebraen frembragt af $\{B_s \mid 0 \leq s \leq t\}$. Vi slutter med følgende sætning:

Sætning 3.18 *$(B_t, \mathcal{F}_t)$ er en martingale.*

Bevis: Lad $0 \leq s < t$. Det følger direkte af definitionen, at $B_t - B_s$ er uafhænging af $\{B_u \mid u \leq s\}$ og dermed også af $\mathcal{F}_s$. Vi finder derfor

$$E(B_t|\mathcal{F}_s) = E(B_s|\mathcal{F}_s) + E(B_t - B_s|\mathcal{F}_s) = B_s + E(B_t - B_s) = B_s \tag{3.32}$$

$\square$

Litteratur

[1] Martin Jakobsen, *Videregående Sandsynlighedsregning*, Københavns Universitet.

[2] M. Love, *Probability Theory I*, 4th edition, springer Verlag 1977.

[3] N.J. Nielsen, *Forelæsningsnotater til MM506*, Forår 2008.

[4] D. Williams, *Probabilty with maringales*, Cambridge 2000.