Nogle bemærkninger om Girsanovs sætning

N.J. Nielsen

1 Exponentielle martingales

Lad i det følgende $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum, B en endimensional Brownsk bevægelse på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ og lad for ethvert $t \geq 0$ $\mathcal{F}_t$ være σ-algebraen frembragt af $\{B_s \mid s \leq t\}$. Vi kan uden indskrænkning antage, at $\mathcal{F}$ er σ-algebraen frembragt af $\{\mathcal{F}_t \mid t \geq 0\}$.

Lad $a\colon [0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{R}$ være en målelig, $\mathcal{F}_t$-tilpasset funktion, som opfylder:

$$P(\int_0^t a(s, \cdot)^2 ds < \infty) = 1 \quad \text{for alle } t \geq 0. \tag{1.1}$$

Vi bemærker, at (1.1) specielt gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, og da $a(s, \omega)^2 \geq 0$ for alle s og alle ω, får vi umiddelbart, at der også gælder

$$P(\int_0^t a(s, \cdot)^2 ds < \infty \quad \text{for alle } t \geq 0) = 1.$$

Vi vil i det følgende betragte

$$M_t = \exp(\int_0^t a dB - \frac{1}{2}\int_0^t a(s, \cdot)^2 ds) \quad \text{for alle } t \geq 0. \tag{1.2}$$

Itos formel giver, at

$$\begin{aligned} dM_t &= M_t(a(t, \cdot)dB_t - \frac{1}{2}a(t, \cdot)^2 dt) + \frac{1}{2}M_t a(t, \cdot)^2 dt = \\ & M_t a(t, \cdot) dB_t, \end{aligned}$$

således at

$$M_t = 1 + \int_0^t aM dB \quad \text{for alle } t \geq 0. \tag{1.3}$$

For et givet $T \in \mathbb{R}_+$ vil vi ofte kun betragte formlerne (1.1), (1.2) og (1.3) for $t \in [0, T]$.

Vi ønsker at undersøge, hvornår (M_t) er en martingale. Den første sætning udsiger:

Sætning 1.1 *(i)* (M_t) *er en supermartingale med* $\mathbb{E}M_t \leq 1$ *for alle* $t \geq 0$.

(ii) (M_t) *er en martingale, hvis og kun hvis* $\mathbb{E}M_t = 1$ *for alle* $t \geq 0$.

Bevis: For ethvert $n \in \mathbb{N}$ sætter vi

$$\tau_n = \inf\{t > 0 \mid \int_0^t M_s^2 a(s,\cdot)^2 \geq n\}$$

(husk, at $\inf \emptyset = \infty$).

Vi bemærker, at τ_n er en stoppetid for alle $n \in \mathbb{N}$, og lad os vise, at $\tau_n \to \infty$ n.s. for $n \to \infty$. Lad dertil $t > 0$ og lad $\omega \in \Omega$, således at $s \to M_s(\omega)$ er kontinuert. Der findes da en konstant $K(\omega)$, så $|M_s(\omega)| \leq K(\omega)$ for alle $0 \leq s \leq t$. (1.1) giver, at bortet fra ω tilhørende en nulmængde kan vi bestemme et n_0, således at

$$K(\omega)^2 \int_0^t a(s,\omega)^2 ds < n_0.$$

Hvis $n \geq n_0$, får vi for alle $0 \leq u \leq t$, at

$$\int_0^u M_s^2 a(s,\omega)^2 ds < n,$$

hvilket giver, at $\tau_n(\omega) > t$ for alle $n \geq n_0$. Dette viser, st $\tau_n(\omega) \to \infty$.

Hvis $0 < T < \infty$, og vi kun betrager situationen på $[0,T]$, viser et tilsvarende argument, at for n.a. $\omega \in \Omega$ vil $\tau_n(\omega) = \infty$ for n tilstrækkelig stor.

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ og ethvert $t \geq 0$ er

$$M_{t\wedge\tau_n} = 1 + \int_0^t 1_{[0,\tau_n]}(s) M_s a(s,\cdot) dB_s \tag{1.4}$$

og heraf ses, at $(M_{t\wedge\tau_n})$ er en martingale med $\mathbb{E}M_{t\wedge\tau_n} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$, idet det følger af definitionen på τ_n, at $1_{[0,\tau_n]} aM \in \nu([0,t])$. Da $M_{t\wedge\tau_n} \geq 0$ giver Fatous lemma, at

$$\mathbb{E}M_t \leq \liminf \mathbb{E}M_{t\wedge\tau_n} = 1 \quad \text{for alle } t \geq 0.$$

Anvendes Fatous lemma for betingede middelvædier, får vi for alle $0 \leq s < t$, at

$$\mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) \leq \liminf \mathbb{E}(M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_s) = \lim M_{s\wedge\tau_n} = M_s,$$

hvilket viser, at (M_t) er en supermartingale.

Lad os nu vise (ii). Hvis (M_t) er en martingale, så vil $\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 = 1$.

Antag nu, at $\mathbb{E}M_t = 1$ for alle $t \geq 0$, og lad $0 \leq s < t$. Hvis vi sætter

$$A = \{\omega \in \Omega \mid \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)(\omega) < M_s(\omega)\},$$

så skal vi blot vise, at $P(A) = 0$. Antagelsen $P(A) > 0$ giver, at

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{E}M_t &= \int_\Omega \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)dP = \\ \int_A \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s) + \int_{\Omega\setminus A} \mathbb{E}(M_t \mid \mathcal{F}_s)dP &< \int_A M_s dP + \int_{\Omega\setminus A} M_s dP = \\ \mathbb{E}M_s &= 1, \end{aligned}$$

hvilket er en modstrid. Derfor er $P(A) = 0$, og dermed er (M_t) en martingale. $\square$

I forbindelse med anvendelser af Girsanovs sætninger er det vigtigt at finde tilstrækkelige betingelser for, at (M_t) er en martingale, ofte kun for $0 \le t \le T$, hvor T er et fast positivt tal. En af de vigtigste er den såkaldte **Novikov betingelse**:

$$\mathbb{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T a(s,\cdot)^2 ds) < \infty \quad \text{hvor } 0 < T < \infty. \tag{1.5}$$

Hvis (1.5) gælder for et fast T, så er $\{M_t \mid 0 \le t \le T\}$ en martingale, og hvis (1.5) gælder for ethvert $0 \le T < \infty$, så er $\{M_t \mid 0 \le t\}$ en martingale. Det ligger uden for dette kursus' rammer at vise dette, og vi vil derfor gøre noget meget simplere: Da aM er tilpasset, følger det umiddelbart af (1.3), at hvis $aM \in L_2([0,t] \times \Omega)$ for ethvert $0 \le t < \infty$ (resp for ethvert $0 \le t \le T < \infty$), så er $\{M_t \mid 0 \le t\}$ en martingale (resp $\{M_t \mid 0 \le t \le T\}$ en martingale). Den næste sætning giver en tilstrækkelig betingelse for dette.

Sætning 1.2 *Lad* $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ *være en målelig funktion og* $0 < T < \infty$. *Hvis*

$$f \in L_2[0,T] \tag{1.6}$$

og

$$|a(t,w)| \le f(t) \quad \textit{for alle } 0 \le t \le T \textit{ og n.a } s \in \Omega, \tag{1.7}$$

så gælder der:

(i) For alle $1 \le p < \infty$ *og alle* $0 \le t \le T$ *vil* $M_t \in L_p(P)$ *med*

$$\mathbb{E}M_t^p \le \exp\big(\frac{p^2-p}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\big). \tag{1.8}$$

(ii) $\{M_t \mid 0 \le t \le T\}$ *er en martingale.*

(iii) . Hvis (1.6) og (1.7) gælder for ethvert $0 \le T < \infty$, *så er* $\{M_t \mid 0 \le t\}$ *en martingale.*

Bevis: For at vise (i) lader vi $1 \leq p < \infty$ og lader $0 \leq t \leq T$. Vi finder

$$M_t^p = \exp\big(p\int_0^t adB - \frac{p}{2}\int_0^t a(s,\cdot)^2 ds\big) \quad = \tag{1.9}$$
$$\exp\big(\int_0^t padB - \frac{1}{2}\int_0^t (pa(s,\cdot))^2 ds\big)\exp\big(\frac{p^2-p}{2}\int_0^t a(s,\cdot)^2 ds\big) \quad \leq$$
$$\exp\big(\int_0^t padB - \frac{1}{2}\int_0^t (pa(s,\cdot))^2 ds\big)\exp\big(\frac{p^2-p}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\big).$$

Da pa opfylder (1.1), giver Sætning 1.1 (i), at

$$\mathbb{E}M_t^p \leq \exp\big(\frac{p^2-p}{2}\int_0^t f(s)^2 ds\big),$$

hvilket viser (i).

For at vise (ii) viser vi, at $aM \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Fra (1.8) med $p = 2$ får vi:

$$\int_0^T \mathbb{E}(a(t,\cdot)^2 M_t^2)dt \leq \int_0^T f(t)^2 \exp\big(\int_0^t f(s)^2 ds\big)dt \quad =$$
$$\exp\big(\int_0^T f(t)^2 dt\big) - 1 \qquad ,$$

hvilket viser, at $aM \in L_2([0,T]\times\Omega)$.

(iii) følger direkte af (ii) $\square$

Vi bemærker, at specielt finder Sætning 1.2 anvendelse, når a er begrænset.

Hvis $0 < T < \infty$, og $\{M_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ er en martingale, så kan vi for ethvert $0 \leq t \leq T$ definere sandsynlighedsmålet Q_t på $\mathcal{F}_t$ ved $dQ_t = M_t dP_t$, hvor P_t betegner restriktionen af P til $\mathcal{F}_t$. Q_t bliver da ækvivalent med P_t for ethvert $0 \leq t \leq T$, og målet Q_T, som er det, som benyttes i Girsanovs sætning har egenskaben $Q_T \mid \mathcal{F}_t = Q_t$ for alle $0 \leq t \leq T$.

Hvis $\{M_t \mid 0 \leq t\}$ er en martingale, så er spørgsmålet, om man kan finde et sandsynlighedsmål Q på $\mathcal{F}$ (som vi har defineret til at være lig σ-algebraen frembragt af alle $\mathcal{F}_t$'erne), således at Q er ækvivalent med P, og således at $Q \mid \mathcal{F}_t = Q_t$ for alle $0 \leq t$. Den næste sætning giver en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at dette indtræffer.

Sætning 1.3 *Antag, at $\{M_t \mid 0 \leq t\}$ er en martingale. Da eksisterer $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ n.s.*

Følgende udsagn er ækvivalente:

(i) Der findes et sandsynlighedsmål Q på $\mathcal{F}$ med $Q << P$ og $Q \mid \mathcal{F}_t = Q_t$ for alle $t \geq 0$.

(ii) (M_t) er uniformt integrabel.

Hvis (i) (eller ækvivalent (ii)) gælder, så er $dQ = M_\infty dP$.

Bevis: Da $\mathbb{E}M_t = 1$ for alle $0 \le t$, kan martingalekonvergenssætningen benyttes, således at M_∞ eksisterer n.s.

Lad først (i) gælde, og bestem $f \in L_1(P)$, så $dQ = fdP$. Da $Q \mid \mathcal{F}_t = Q_t$, følger det af Øksendals lemma 8.6.3, at $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_t) = M_t$ for alle $0 \le t$. Lad os vise, at dette medfører, at $\{M_t \mid t \ge 0\}$ er uniformt integrabel. Da $(M_t(\omega))$ er konvergent for n.a. ω, vil $\sup_{t\ge 0} M_t(\omega) < \infty$ for n.a. ω. Hvis $0 \le t < \infty$ og $x > 0$, finder vi

$$\begin{aligned}\int_{(M_t>x)} M_t dP &= \int_{(M_t>x)} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_t) dP = \\ \int_{(M_t>x)} f dP &\le \int_{(\sup M_s>x)} f dP,\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet, at $(M_t > x) \in \mathcal{F}_t$

Dette giver nu, at

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sup_{t\ge 0} \int_{(M_t>0)} M_t dP &\le \lim_{x\to\infty} \int_{(\sup M_t>x)} f dP = \\ \int_{(\sup M_t=\infty)} f dP &= 0,\end{aligned}$$

hvilket viser påstanden.

Antag dernæst, at (ii) gælder. Da vil $M_t \to M_\infty$ i $L_1(P)$, hvoraf følger, at $\mathbb{E}M_\infty = \lim \mathbb{E}M_t = 1$, samt at vi for ethvert $0 \le t < \infty$ får, at $\mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = \lim_s \mathbb{E}(M_s \mid \mathcal{F}_t) = M_t$. Sætter vi nu $dQ = M_\infty dP$, så er Q et sandsynlighedsmål, og hvis $t \ge 0$, og $A \in \mathcal{F}_t$, så får vi:

$$\begin{aligned}Q(A) = \int_A M_\infty dP &= \int_A \mathbb{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) dP = \\ \int_A M_t dP &= Q_t(A),\end{aligned}$$

hvilket viser, at $Q \mid \mathcal{F}_t) = Q_t$, og dermed at (i) gælder.

Vi har således vist, at (i) og (ii) er ækvivalente.

Lad nu atter (i) gælde. Af beviset for $(ii) \Rightarrow (i)$ får vi, at hvis vi sætter $dQ_1 = M_\infty dP$, så er $Q_1(A) = Q(A)$ for alle $A \in \bigcup_{0\le t} \mathcal{F}_t$, og da denne klasse er et $\cap$-stabilt frembringersystem for $\mathcal{F}$, vil $Q_1(A) = Q(A)$ for alle $A \in \mathcal{F}$; dermed er $dQ = dQ_1 = M_\infty dP$. □

Kombinerer vi Sætning 1.2 med Sætning 1.3 får vi følgende korollar.

Korollar 1.4 *Lad $f\colon [0,\infty[\to [0,\infty[$ være en målelig funktion, således at*

$$f \in L_2([0,\infty[) \tag{1.10}$$

$$|a(t,\omega)| \leq f(t) \quad \textit{for alle } 0 \leq t \textit{ og n.a. } \omega \in \Omega. \tag{1.11}$$

Da er (M_t) en uniformt integrabel martingale, således at Sætning 1.3 finder anvendelse.

Bevis:

Det følger umiddelbart, at (1.6) og (1.7) i Sætning 1.2 er opfyldte, således at (M_t) er en martingale. Hvis vi benytter (1.8) med $p = 2$, får vi:

$$\mathbb{E}M_t^2 \leq \exp\big(\int_0^t f(s)^2 ds\big) \leq exp\big(\int_0^\infty f(s)^2 ds\big),$$

hvilket viser, at (M_t) er begrænset i $L_2(P)$ og dermed uniformt integrabel. Dette viser korollaret. $\square$

Følgende eksempel viser, at det ikke er tilstrækkeligt for uniform integrabilitet af (M_t), at a er begrænset. Eksemplet viser også, hvor galt det kan gå i uendelig, når uniform integrabilitet mangler.

Eksempel 1.5 *Lad a være konstant, $a \neq 0$ (1.6) og (1.7) er da klart opfyldte, således at (M_t) er en martingale. Vi ser, at $M_t = \exp(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t)$. $M_t \to 0$ n.s. for $t \to \infty$, men da $\mathbb{E}M_t = 1$ for alle $0 \leq t$, kan (M_t) ikke være uniformt integrabel.*

At $M_\infty = 0$ kan indses således: Det er tilstrækkeligt at vise, at $M_t \to 0$ i sandsynlighed, thi så vil der findes en delfølge (t_n), så $M_{t_n} \to 0$ n.s.

Lad dertil $\varepsilon > 0$ og bestem t_0, så $\frac{1}{2}a^2 t_0 + \log \varepsilon > 0$ og sæt $b_t = a^{-1}(\frac{1}{2}a^2 t + \log \varepsilon)$. Hvis $a > 0$, får vi for alle $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} P(M_t \geq \varepsilon) &= P(B_t \geq b_t) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \int_{b_t}^\infty \exp(-\frac{1}{2t}x^2)dx \leq \\ \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} \frac{1}{b_t} \int_{b_t}^\infty x \exp(\frac{1}{2t}x^2)dx &= \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[-\exp(-\frac{1}{2t}x^2)\big]_{x=b_t}^\infty = \\ \sqrt{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2t}b_t^2) &\to 0 \quad \textit{for } t \to \infty \end{aligned}$$

Tilsvarende regninger viser, at også i tilfældet $a < 0$ vil $P(M_t \geq \varepsilon) \to 0$ for $t \to \infty$.

Lad os slutte dettecafsnit med føgende sætning:

Sætning 1.6 *Lad $0 \leq T < \infty$, antag at $\{M_t \mid 0 \leq t \leq T\}$ er en martingale og sæt $Q = Q_T$. Hvis $(X_t) \subseteq L_1(Q)$ er $(\mathcal{F}_t)$–tilpasset, så er (X_t) en Q–martingale hvis og kun hvis $(X_t M_t)$ er en P–martingale.*

Bevis:

Dette er en umiddelbar konsekvens af følgende formel, som er Øksendals Lemma 8.6.2 med vore forudsætninger. For alle $0 \leq s < t$ har vi:

$$\mathbb{E}_P(X_t M_t \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_Q(X_t \mid \mathcal{F}_s))\mathbb{E}_P(M_t \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_Q(X_t \mid \mathcal{F}_s) M_s.$$

□

Det ses umiddelbart ved at arbejde koordinatvis, at de ovenstående sætninger let kan generaliseres til tilfældet, hvor a antager værdier i $\mathbb{R}^n$ og B er en n-dimensional Brownsk bevælgelse.

2 Bemærkninger til Øksendals Sætning 8.6.4

I dette afsnit lader vi $a\colon [0.\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ være en $\mathcal{F}_t$-tilpasset målelig funktion, som opfylder (1.1) og definerer M_t ved (1.2). Vi vil ellers benytte betegnelserne fra Øksendals bog. Hans Sætning 8.6.4 er kun korrekt i tilfældet $T = \infty$, hvis det forudsættes, at (M_t) er uniformt integrabel. Lad os i det følgende antage, at $T < \infty$. Han viser kun sætningen i tilfældet, hvor a er begrænset, men gør det ikke helt klart, hvor det benyttes. Hans bevis virker imidlertid også, hvis a opfylder betingelserne i vore Sætning 1.2. Dette kan indses således:

Han viser formlen:

$$dK_i(t) = M_t \gamma^{(i)}(t) dB(t) \tag{2.1}$$

For at vise at K_i er en martingale må vi vise, at $M\gamma^{(i)} \in L_2([0,T]\times\Omega, \mathbb{R}^n)$, og det er selvfølgelig det samme som at vise, at for alle $1 \leq j \leq n$ er $M\gamma_j^{(i)} \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Formlerne hos Øksendal og vore forudsætninger fra Sætning 1.2 viser, at

$$M_t|\gamma_j^{(i)}| \leq M_t + M_t|Y_i(t)|f(t) \quad \text{for alle } 0 \leq t \leq T. \tag{2.2}$$

Da $M \in L_2([0,T]\times\Omega)$ ifølge Sætning 1.2, er det nok at vise, at $MY_i f \in L_2([0,T]\times\Omega)$. Vi finder

$$|Y_i(t)| \leq \int_0^t a_i(s)ds + |B_i(t)| \leq \int_0^T f(s)ds + |B_i(t)|,$$

således at

$$M_t|Y_i(t)|f(t) \leq f(t)M_t \int_0^T f(s)ds + f(t)M_t|B_i(t)|. \tag{2.3}$$

Sæning 1.2 giver, at

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t)^2 \mathbb{E}(M_t^2)dt \quad &\leq \quad \int_0^T f(t)^2 \exp\Big(\int_0^t f(s)^2 ds\Big) = \\ \exp\Big(\int_0^T f(t)^2 dt\Big) - 1 \quad &< \quad \infty, \end{aligned}$$

således at det første led på højresiden af (2.3) tilhører $L_2([0,T] \times \Omega)$. For at klare andet led benytter vi Cauchy-Schwartz' ulighed og finder ved at beytte Sætning 1.2, (1.8):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t^2 B_i(t)^2) &\leq \mathbb{E}(M_t^4)^{1/2}\mathbb{E}(B_i(t)^4)^{1/2} \leq \\ \exp\big(3\int_0^T f(s)^2 ds\big)\sqrt{3}T, \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet, at $\mathbb{E}(B_i(t)^4) = 3t^2$.

Vi finder endelig:

$$\int_0^t f(t)^2 \mathbb{E}(M_t^2 B_i(t)^2) dt \leq \sqrt{3}T \exp\big(\int_0^T f(s)^2 ds\big) \int_0^T f(t)^2 dt < \infty,$$

hvilket viser det ønskede.