INSTITUT FOR MATEMATIK OG DATALOGI — March 8, 2011
ODENSE UNIVERSITET — NJN/MA

Nogle bemærkninger om Øksendals eksempel 10.2.2

I det følgende vil vi benytte betegnelserne fra Øksendals bog, især dem fra eksemplet. Vi betragter funktionen $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ givet ved

(1) $$g(t,x) = e^{-\rho t}(x-a) \text{ for alle } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

Processen (X_t) er givet ved

(2) $$X_t = X_0 \exp((r - \tfrac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t) \text{ for alle } t \geq 0,$$

og for alle $(s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ sætter vi

(3) $$Y_t^{(s,x)} = (s+t, X_t^x) \quad \text{for alle } t \geq 0.$$

Vi vil i det følgende **forudsætte, at** $r > \frac{1}{2}\alpha^2$, således at $X_t \to \infty$ n.s.

Ved benyttelse af formel (10.2.3) ser vi, at hvis τ er en vilkårlig stoptid, så er

(4)
$$E^{(s,x)}(g(\tau, X_\tau)) = E^{(s,x)}(e^{-\rho\tau}(X_\tau - a)) = E^{(s,x)}g(Y_\tau) = E(e^{-(\tau+s)\rho}(X_\tau^x - a)) = e^{-s\rho}Ee^{-\tau\rho}(X_\tau^x - a).$$

Vi ønsker naturligvis at finde

(5) $$g^*(s,x) = \sup_\tau E^{(s,x)}(g(\tau, x_\tau))$$

samt en stoptid, som giver supremaet.

Mængden $U = \{(s,x) \mid \hat{A}g)(s,x) > 0\}$ er beskrevet på side 220.

Vi vil i det følgende betragte tilfældet, hvor $r < \rho$. Som sædvanlig sætter vi

(6) $$D = \{(s,x) \mid g(s,x) < g^*(s,x)\},$$

og vi skal prøve at beskrive D.

Vi bemærker først:

Sætning 1 *D er translationsinvariant i t-aksens retning, d.v.s.*

(7) $$D = D + (t_0, 0) \textit{ for alle } t_0$$

Bevis: Se Øksendals udregninger lige efter formel 10.2.8. □

For ethvert $0 \leq x_0 \leq \infty$ sætter vi

(8) $$D(x_0) = \{(s, x) \mid 0 < x < x_0\}$$

Definition 2 *En delmængde $S \subseteq R \times \mathbb{R}_+$ kaldes en stribe, hvis der findes $0 \leq x_1 < x_2 \leq \infty$, således at $S = \{(s, x) \mid x_1 < x < x_2\}$*

Vi får brug for følgende lemma, som er en konsekvens af Sætning 1.

Lemma 3 *Hvis $(s, x) \in D$, så findes en maximal stribe $S_0 \subseteq D$, således at $(s, x) \in S_0$.*

Bevis: Lad os først vise, at der findes striber $S \subseteq D$, så $(s, x) \in S$. Da D er åben, findes et $\varepsilon > 0$, således at $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[\times]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq D$, og af Sætning 1 følger det nu umiddelbart, at $S = \{(u, z) \mid x - \varepsilon < z < x + \varepsilon\} \subseteq D$. Det er klart, at $(s, x) \in S$. Sæt nu

(9) $$S_0 = \bigcup \{S \subseteq D \mid S \quad \text{stribe med } (s, x) \in S\}$$

Hvis S_1 og S_2 er striber i D med $(s, x) \in S_1\}$ og $(s, x) \in S_2$, så vil $(s, x) \in S_1 \cap S_2$, således at $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$. Heraf ses det, at S_0 er en stribe. Det er klart fra (9), at S_0 er maximal. □

Vi er nu i stand til at vise:

Sætning 4 *Sæt $\bar{x}_0 = \sup\{x \mid \exists s$, så $(s, x) \in D\} \leq \infty$. Da gælder $D = D(\bar{x}_0)$.*

Bevis: Det er klart, at $D \subseteq D(\bar{x}_0)$. Antag dernæst, at der findes et $(s_1, z_0) \in D(\bar{x}_0) \backslash D$. Af formen af U følger det umiddelbart, at $\frac{a\rho}{\rho - r} \leq z_0$. Da endvidere $z_0 < \bar{x}_0$, følger det, at der findes et x_1 med $x_1 > z_0$, således at $(s_1, x_1) \in D$. (Her benyttes, at Sætning 1 giver, at hvis $(s, x_1) \in D$, så vil også $(s_1, x_1) \in D$). Lad nu S_0 være den maximale stribe i D, som indeholder (s_1, x_1), og lad τ_{S_0} være exittiden for S_0. Da $(s_1, z_0) \notin D$ gælder der for alle $(s, x) \in S_0$, at $x > z_0 \geq \frac{a\rho}{\rho - r}$. Dette giver, at $(\hat{A}g)(s, x) \leq 0$ for alle $(s, x) \in S_0$. Lad (Q_m) være en følge af begrænsede kasser, således at $Q_m \subseteq Q_{m+1}$ og $S_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$. (Bemærk, at en sådan følge findes), og lad τ_m være exittiden for Q_m.

Lad $\tau \leq \tau_{s_0}$ være en stoptid med $\tau < \infty$. For et vilkårligt $m \in \mathbb{N}$ benytter vi Dynkins formel på stoptiden $\rho_m = \tau \wedge \tau_m \wedge m$ og får

(10) $$E^{(s_1, x_1)} g(Y_{\rho_m}) = g(s_1, x_1) + E^{(s_1, x_1)} \int_0^{\rho_m} (\hat{A}g)(Y_t)\, dt \leq g(s_1, x_1)$$

Da $\rho_m \to \tau$ for $m \to \infty$ giver (10) og Fatous lemma, at

$$E^{(s_1,x_1)} g(Y_\tau) \leq g(s_1, x_1). \tag{11}$$

Lad nu for ethvert N D_N og τ_N være definerede som i Sætning 10.1.9 hos Øksendal. Af denne sætning følger desuden, at der findes et N_0 så $(s_1, x_1) \in D_N$ for alle $N \geq N_0$. Når vi starter processen (Y_t) i (s_1, x_1), følger der af maximaliteten af S_0, at når vi forlader S_0, forlader vi også D. Dette viser, at

$$\tau_N \leq \tau_{S_0} \quad \text{for alle} \quad N \geq N_0. \tag{12}$$

(11) giver derfor, idet det følger af X_t' s form, at $\tau_N < \infty$ for alle $N \geq N_0$:

$$E^{(s_1,x_1)} g(Y_{\tau_N}) \leq g(s_1, x_1) \quad \text{for alle} \quad N \geq N_0 \tag{13}$$

Lader vi nu $N \to \infty$, giver Øksendals Sætning 10.1.9, at

$$g^*(s_1, x_1) = \lim_{N \to \infty} E^{(s_1,x_1)} g(Y_{\tau_N}) \leq g(s_1, x_1), \tag{14}$$

hvilket er i modstrid med, at $(s_1, x_1) \in D$. □

Vi vil nu finde en optimal stoptid for vort problem, og det vil samtidig vise, at faktisk er $\bar{x}_0 < \infty$. For ethvert x_0 med $\frac{a\rho}{\rho - r} \leq x_0 < \infty$ lader vi $\tau(x_o)$ være exittiden for $D(x_0)$. Da $X_t \to \infty$, vil $\tau(x_0) < \infty$ n.s. Bemærk, at det følger af Sætning 4, at hvis $x_0 < \bar{x}_0$, så er $D(x_0) \subseteq D$. Vi følger Øksendals udregninger og finder funktionen $\tilde{g}_{x_0}$ defineret ved

$$\tilde{g}_{x_0}(s, x) = e^{-\rho s}(x_0 - a)(\frac{x}{x_0})^{\gamma_1}. \tag{15}$$

Da $r < \rho$ vil $\gamma_1 > 1$.

Det følger af Øksendals formler (10.2.9), (10.2.10) og (10.2.12), at

$$\tilde{g}_{x_0}(s, x) = E^{(s,x)}(g(Y_{\tau(x_0)})). \tag{16}$$

For at vise at højresiden af (16) opfylder Øksendals ligningssystem (10.2.10), benyttes et par resultater fra afsnit 9 i bogen, som vi vil vise efterfølgende.

Vi kan nu vise:

Sætning 5 *Sæt* $x_{\max} = \frac{a\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$*. For ethvert* $0 < x_0 < x_{\max}$ *vil* $\tilde{g}_{x_0}(s, x) \leq \tilde{g}_{x_{\max}}(s, x)$ *for alle* $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Bevis: For fastholdt (s,x) differentierer vi $\tilde{g}_{x_1}(s,x)$ m.h.t. x_0. $\square$

Vi definerer funktionen $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ved

(17)
$$\varphi(s,x) = \begin{cases} \tilde{g}_{\max}(s,x) & \text{for alle } (s,x) \in D(x_{\max}) \\ g(s,x) & \text{for alle } (s,x) \notin D(x_{\max}) \end{cases}$$

Vi kan nu vise

Sætning 6

(i) Exittiden $\tilde{\tau}$ for $D(x_{\max})$ er en optimal stoptid for vort problem.

(ii) $D = D(x_{\max})$.

Der gælder desuden

(18)
$$g^*(s,x) = \varphi(s,x) \textit{ for alle } (s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+.$$

Bevis:

Vi vil først vise, at φ er en superharmonisk majorant for g. For at få at φ er en majorant for g, må vi vise, at

(19)
$$h(x) = (x_{\max} - a)\left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{\gamma_1} - (x-a) \geq 0 \quad \text{for alle } 0 \leq x \leq x_{\max}.$$

Da $(x_{\max} - a) = \frac{a}{\gamma_1 - 1}$ får vi ved differentiation:

(20)
$$h'(x) = \left(\frac{x}{x_{\max}}\right)^{\gamma_1 - 1} - 1 < 0 \quad \text{for } 0 < x < x_{\max},$$

og da $h(0) = a$ og $h(x_{\max}) = 0$, følger det, at $h(x) \geq 0$ for alle $x \in [0, x_{\max}]$.

Hvis $\hat{\mathcal{A}} = L$ er differentialoperatoren knyttet til processen Y, ses det let ved udregning, at $(Lg)(s,x) \leq 0$ for alle (s,x) med $x \geq x_{\max}$. Da $\tilde{g}_{x_{\max}}$ er en løsning til ligningen (10.2.10), vil $L(\tilde{g}_{x_{\max}})(s,x) = 0$ for alle (s,x) med $0 < x < x_{\max}$. Dette viser, at $L(\varphi)(s,x) \leq 0$ for alle (s,x) med $x \in \mathbb{R}_+$. For at vise at φ er superharmonisk, lader vi $\tau < \infty$ være en vilkårlig stoppetid, vælger en stigende følge (A_m) af begrænsede kasser, således at $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ og lader τ_m betegne exittiden for A_m for ethvert $m \in \mathbb{N}$. Sæt endvidere $\sigma_{k,m} = \tau \wedge \tau_m \wedge k$ for ethvert $k \in \mathbb{N}$. Dynkins formel giver nu:

(21)
$$E^{(s,x)}\varphi(Y_{\sigma_{k,m}}) = \varphi(s,x) + E^{(s,x)} \int_0^{\sigma_{k,m}} (L\varphi)(Y_t)\, dt \leq g(s,x).$$

Da $\sigma_{k,m} \to \tau \wedge \tau_m$ for $k \to \infty$, og $\tau \wedge \tau_m \to \tau$ for $m \to \infty$, giver (21) og en dobbelt anvendelse af Fatous lemma, at

$$E^{(s,x)}(\varphi(Y_\tau) \leq \varphi(s,x), \tag{22}$$

hvilket viser, at φ er superharmonisk.

Vi vil nu vise, at

$$\varphi(s,x) = E^{(s,x)} g(Y_{\tilde{\tau}}) \quad \text{for alle } (s,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{23}$$

Hvis $(s,x) \in D(x_{\max})$, så følger (23) af (16).Det kan vises, at alle randpunkter af $D(x_{\max}$ af formen $(s, x_{\max})$ er regulære (det vil vi ikke gøre), og derfor vil $\tilde{\tau} = 0$ n.s for alle punkter $(s,x) \notin D(x_{\max})$. Højresiden giver nu klart $\varphi(s,x)$ i dette tilfælde, og (23) er dermed vist.

φ er altså en superharmonisk majorant for g, som samtidig opfylder (23). Det følger nu af Øksendals Korollar 10.1.10, at $\tilde{\tau}$ er en optimal stopppetid, og at $\varphi = g^*$. Korollar 10.1.12 giver så, på D er $\tilde{\tau} \geq \tau_D$. Dette giver, at $x_{\max} = \tilde{x}_0$ og dermed $D = D(x_{\max})$, thi hvis $x_{\max} < \tilde{x}_0$, ville $\tilde{\tau}(s,x) < \tau_D(s,x)$ n.s. for alle $(s,x) \in D(x_{\max})$.

□