Erik Kristensen og
Ole Rindung

MATEMATIK 1

10. UDGAVE
2. OPLAG

KØBENHAVN
G·E·C GADS FORLAG
1981

I. Mængder og udsagn

Mængder, delmængder

1. Man har ofte – såvel i matematikken som uden for denne – brug for at sammenfatte en række objekter og betragte dem alle på én gang. Mange of sprogets gloser udtrykker en sådan sammenfatning. Med et ord som f.eks. »lærerkollegiet« sammenfatter man alle de personer, der er knyttede som lærere til en given skole; med ordet »flåden« sammenfatter man alle søværnets skibe o.s.v. Man kan imidlertid også have brug for at sammenfatte en række objekter i sådanne situationer, hvor sproget ikke ejer en særskilt glose for den dannede samling. I så fald benytter man beskrivende vendinger som »alle ugifte mænd mellem 20 og 25 år« eller »alle positive hele tal, som er delelige med 7«.

Når vi i matematikken foretager sådanne sammenfatninger, benytter vi ordet *mængde*. Vi bruger f.eks. vendingen »mængden af positive hele tal, der skrives med ét ciffer« og mener hermed den samling, der består af tallene

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,.$$

De enkelte objekter i en mængde kaldes mængdens *elementer*. De tal, der er opskrevet lige ovenfor, er således elementer i mængden af positive hele tal; og den mængde, der betegnes »lærerkollegiet ved N. N. gymnasium« har som elementer de personer, der er lærere ved den pågældende skole.

Ved afgrænsningen af en mængde interesserer vi os kun for, hvilke objekter der tilhører mængden. Den orden, hvori mængdens elementer angives, er uden betydning. Hvis to mængder A og B består af de samme elementer, siger vi, at A er lig med B og skriver: $A = B$.

***1.1 eksempel.** I det følgende kommer vi så ofte til at beskæftige os med visse særlig vigtige talmængder, at det er bekvemt at have faste betegnelser for dem.

Mængden af hele tal vil vi overalt i det følgende betegne med Z. Mængden af positive hele tal (de naturlige tal) betegner vi med Z_+.

Et tal kaldes *rationalt*, når det enten er et helt tal eller kan skrives som en brøk, hvis tæller og nævner er hele tal. Mængden af rationale tal vil vi betegne med Q. Mængden af positive rationale tal betegner vi med Q_+.

Når man indretter en ret linie som en *tallinie*, bliver ethvert tal anskueliggjort som et punkt på linien: man vælger et punkt på linien og lader det være et billede af tallet 0, så vælges et andet punkt, der skal være billede af 1. Punktet midt imellem de to først valgte punkter skal så være billede af $\frac{1}{2}$ o.s.v. Et punkt på linien, der er billede af et tal t, siges at *repræsentere* tallet t.

Hvis man tænker sig ethvert tal i talmængden Q repræsenteret på tallinien, så kommer uendelig mange af liniens punkter i brug; men det er ikke alle liniens punkter, der bliver brugt. De punkter på tallinien, der ikke kommer til at repræsentere rationale tal, siges at repræsentere *irrationale* tal.

Mængden af rationale tal og mængden af irrationale tal udgør tilsammen mængden af *reelle* tal. Denne mængde repræsenteres altså ved samtlige punkter på tallinien. Mængden af reelle tal vil vi betegne med R. Mængden af positive reelle tal betegner vi med R_+.

1.2 eksempel. Eksempler på rationale tal er

$$0, \ -3, \ 7, \ \tfrac{1}{2}, \ -\tfrac{3}{7}, \ 456\tfrac{1}{3} .$$

Det sidstnævnte af disse tal er rationalt, fordi det kan skrives som en brøk med heltallig tæller og nævner:

$$456\tfrac{1}{3} = \tfrac{1369}{3} .$$

Et *decimaltal* er et tal, der kan skrives som et helt tal efterfulgt af et decimalkomma og et endeligt antal decimaler. Eksempler på decimaltal er

$$2{,}479; \ -0{,}000342; \ 205{,}000001; \ 13 .$$

Ethvert decimaltal er et rationalt tal, da det altid kan skrives som en brøk med heltallig tæller og nævner. Vi har f.eks.

$$2{,}479 = \frac{2479}{1000} \quad \text{og} \quad -0{,}000342 = \frac{-342}{1000000} .$$

Der findes dog rationale tal, f.eks. $\frac{1}{3}$ og $\frac{4}{7}$, der ikke kan skrives som decimaltal.

Regnemaskinen er kun i stand til at arbejde med decimaltal. Når regnemaskinen angiver, at

$$\tfrac{4}{7} = 0{,}57142857 ,$$

så begår den dermed en lille unøjagtighed. Maskinen erstatter tallet $\frac{4}{7}$ med tallet

$$\frac{57142857}{100000000} .$$

Giver vi de to brøker fællesnævneren 700000000, har vi, at

$$\frac{4}{7} = \frac{400000000}{700000000}$$

og

$$\frac{57142857}{100000000} = \frac{399999999}{700000000} .$$

Heraf ser vi, at der er begået en fejl af størrelsen

$$\frac{1}{700000000}.$$

Eksempler på irrationale tal er

$$\sqrt{5}, \ -\sqrt{3}, \ 3-\sqrt{11}, \ \pi.$$

Det er klart, at regnemaskinens gengivelse af irrationale tal også må være behæftet med små fejl.

Hvis a betegner et objekt, der er element i mængden M, skriver vi

$$a \in M$$

(læses: »a er et element i M« eller »a tilhører M«). Hvis a ikke er et element i M, skriver vi

$$a \notin M.$$

1.3 eksempel. Lad M være mængden af de polygoner, der har en omskreven cirkel. Når t er en trekant, og u er et rektangel, er $t \in M$ og $u \in M$. Når v er et parallelogram, der ikke er et rektangel, er $v \notin M$.

Hvis en mængde består af et endeligt antal elementer, og dette antal ikke er ubekvemt stort, kan vi beskrive mængden ved at opregne samtlige elementer. Hvis mængden f.eks. består af tallene 5, 7, 9 og 11, betegner vi den med symbolet

$$\{5, 7, 9, 11\}.$$

Da en mængde er karakteriseret alene ved de elementer, den indeholder, har vi, at

$$\{5, 7, 9, 11\} = \{7, 11, 9, 5\}.$$

I visse tilfælde kan man tillempe symbolet for opregning af en mængdes elementer, så det kan benyttes, selv om der ikke er tale om opregning af samtlige elementer i mængden. Eksempelvis kan nævnes, at mængden af de positive hele tal, der kan skrives med højst tre cifre, og mængden af hele lige tal kan angives ved henholdsvis

$$\{1, 2, \ldots, 999\} \quad \text{og} \quad \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}.$$

I sådanne ufuldstændige opregninger må man angive så mange elementer, at det klart fremgår, hvilken mængde der er tale om. Af og til kan man klargøre opregningen ved at antyde en regel, efter hvilken mængdens elementer kan bestemmes. Således betegner symbolerne

$$\{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\} \quad \text{og} \quad \{2, 4, \ldots, 2^n, \ldots\}$$

henholdsvis mængden af positive lige tal og mængden af potenser af 2.

2. En mængde A siges at være en *delmængde* til mængden B, hvis ethvert element i A også er element i B. At A er en delmængde til B, angiver vi ved at skrive

$$A \subseteq B \quad \text{eller} \quad B \supseteq A .$$

Hvis $A \subseteq B$, og der findes mindst ét element i B, der ikke er element i A, siger vi, at A er en *ægte delmængde* til B (skrives: $A \subset B$ eller $B \supset A$). Hvis $A \subseteq B$, gælder åbenbart enten, at $A = B$, eller at $A \subset B$.

Tegnene $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$ og $\supset$ kaldes *inklusionstegn*, og udsagn af formen $A \subseteq B$ og $A \subset B$ kaldes *inklusioner*.

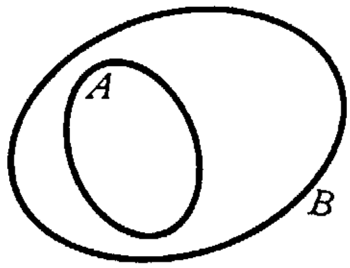

Fig. 2.I

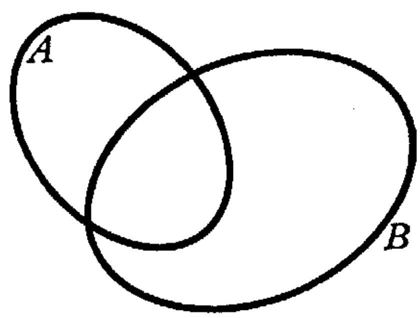

Fig. 2.II

Man illustrerer ofte forhold vedrørende mængder ved hjælp af tegninger, hvor mængderne afbildes som plane punktmængder. På fig. (2.I) er således antydet, at $A \subseteq B$; og fig. (2.II) viser en beliggenhed af A og B, hvor det hverken gælder, at $A \subseteq B$ eller $B \subseteq A$. Man må ved brug af sådanne figurer vogte sig for en for håndfast geometrisk opfattelse af mængderne.

2.1 eksempel. Når $A = \{2, 3, 4\}$ og $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, er $A \subseteq B$, thi ethvert element i A er element i B. Der gælder endda, at $A \subset B$, thi f.eks. tallet 5 er element i B men ikke i A.

2.2 eksempel. Man bør skelne mellem et element a og den mængde $\{a\}$, der har det ene element a. Der gælder f.eks., at

$$1 \in \{1, 2, 3\} \quad \text{og} \quad \{1\} \subseteq \{1, 2, 3\} .$$

Når man skal beskrive en bestemt delmængde A til en given mængde M, gør man det ofte ved at angive en egenskab, som netop elementerne i A besidder. Således kan mængden Q_+, der er en delmængde af Q, beskrives som

»mængden af de elementer x i Q, for hvilke $x > 0$« .

På tilsvarende måde kan man ved beskrivelsen

»mængden af de elementer x i R, for hvilke $(x-2)(x-3) = 0$«

fastlægge mængden $\{2,3\}$.

Det gælder almindeligt, at en delmængde A til en given mængde M kan angives på formen

(2.3) »mængden af de elementer x i M, for hvilke ...« ,

hvor der på prikkernes plads står en egenskab, der karakteriserer netop de elementer x, der tilhører A. Det har derfor vist sig bekvemt at indføre et specielt symbol for denne sætningsbygning, nemlig

$$\{x \in M \mid \ldots\}, \tag{2.3'}$$

hvor der her står det samme på prikkernes plads som i (2.3). Ved brug af dette symbol kan vi skrive

$$Q_+ = \{x \in Q \mid x > 0\}$$

og

$$\{2,3\} = \{x \in R \mid (x-2)(x-3) = 0\}.$$

2.4 eksempel. Mængden $\{x \in Z \mid x \geqq 10\}$ består af alle hele tal fra og med 10 og opefter. Denne mængde kan også angives ved

$$\{x \in Z_+ \mid x \text{ skrives med mindst to cifre}\}$$

og ved

$$\{10, 11, \ldots, n+9, \ldots\}.$$

Det er klart uden betydning, om man benytter bogstavet x eller et andet bogstav i symbolet (2.3'). Eksempelvis har vi, at

$$Q_+ = \{t \in Q \mid t > 0\} = \{\alpha \in Q \mid \alpha > 0\}.$$

Når misforståelse er udelukket, tillader man sig ofte at afkorte mængdesymbolet, idet man undlader at angive den mængde, hvoraf der skal dannes en delmængde. Hvis det f.eks. af sammenhængen fremgår, at der er tale om mængder af reelle tal, skriver man således

$$\{x \mid x > 5\} \quad \text{i stedet for} \quad \{x \in R \mid x > 5\}.$$

Hvis C er et punkt, og det af sammenhængen fremgår, at talen er om punktmængder i planen, kan man benytte symbolet

$$\{P \mid \text{afstanden fra } C \text{ til } P \text{ er lig med } 2\}$$

som betegnelse for den cirkel, der har C som centrum og radius 2. Inden for rumgeometri ville man imidlertid tolke dette symbol som betegnelse for en kugle.

3. Når A og B er to mængder, betyder udsagnet »$A=B$«, at A og B består af de samme elementer, altså at ethvert element i A er element i B, og ethvert element i B er element i A. Der gælder altså, at

(3.1) $\qquad A = B \quad \text{når og kun når} \quad A \subseteq B \quad \text{og} \quad B \subseteq A\,.$

Hvis det om tre mængder A, B og C gælder, at $A \subseteq B$ og $B \subseteq C$, gælder det også, at $A \subseteq C$. Man tillader sig i dette tilfælde at skrive:

$$A \subseteq B \subseteq C\,.$$

På lignende måde benytter man symbolerne

$$A \subseteq B \subset C,\ A \subset B \subseteq C \quad \text{og} \quad A \subset B \subset C$$

til sammenskrivning af to inklusioner. I alle disse tilfælde har vi, at $A \subset C$. Derimod sammenskriver man ikke inklusionerne $A \supseteq B$ og $B \subseteq C$ til $A \supseteq B \subseteq C$, hvor inklusionstegnene vender hver sin vej.

4. Vi betragter symbolet

$$A = \{x \in R \mid x^2 = a\}\,,$$

hvor a er et givet reelt tal. Hvis $a > 0$, er A lig med mængden $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$; og hvis $a = 0$, er $A = \{0\}$. Hvis $a < 0$, findes der ikke noget reelt tal x, så $x^2 = a$. Vi siger derfor, at i dette tilfælde er A en mængde uden elementer.

Lad dernæst c_1 og c_2 være to givne punktmængder i planen. Vi kan da se på punktmængden

$$C = \{P \mid P \in c_1 \quad \text{og} \quad P \in c_2\}\,.$$

Også i dette tilfælde kan vi komme ud for, at C er en mængde uden elementer, nemlig hvis der ikke findes noget punkt, der tilhører både c_1 og c_2.

Vi har dermed set to eksempler på mængder uden elementer, en talmængde og en punktmængde. Der er imidlertid ikke grund til at sondre mellem disse mængder, så vi indfører én mængde, *den tomme* *mængde*, der er karakteriseret ved, at den ikke indeholder noget element. Som betegnelse for den tomme mængde benytter vi symbolet $\emptyset$.

Når M er en vilkårlig mængde, gælder det åbenbart, at symbolet $\{x \in M \mid x \notin M\}$ betegner en mængde uden elementer, altså den tomme mængde. Da symboler af formen $\{x \in M \mid \ldots\}$ normalt betegner delmængder til M, fastsætter vi som en praktisk vedtægt, at for enhver mængde M er

$$\emptyset \subseteq M .$$

Fællesmængde, foreningsmængde, mængdedifferens

5. Når A og B er givne mængder, kan vi betragte mængden af de objekter, der er element både i A og i B. Denne mængde kalder vi *fællesmængden* for A og B, og vi betegner den med $A \cap B$. Begrebet fællesmængde er på fig. (5.1) illustreret, idet $A \cap B$ er angivet skraveret.

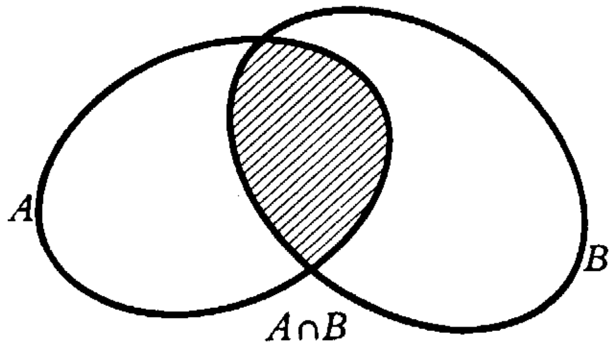

Fig. 5.1

Ud fra definitionen på fællesmængde er det klart, at

(5.1) $$A \cap B = B \cap A .$$

Endvidere er

(5.2) $$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) ,$$

thi både venstre og højre side af (5.2) er lig med mængden af de objekter, der er element i enhver af de tre mængder A, B og C. Man benytter betegnelsen $A \cap B \cap C$ for denne mængde. Mere generelt lader man symbolet

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

betegne mængden af de objekter, der er element i enhver af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

5.3 øvelse. Tegn en figur, der illustrerer mængden $A \cap B \cap C$.

5.4 eksempel. For vilkårlige mængder A og B er

$$A \cap B \subseteq A, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset .$$

5.5 øvelse. Tegn en figur, der viser to mængder A og B, om hvilke det gælder, at $A \cap B = A$.

Definitionen på begrebet fællesmængde kan udvides til at omfatte et uendeligt system af mængder, idet vi her som før kalder mængden af de objekter, der tilhører enhver af systemets mængder, for fællesmængden.

5.6 eksempel. Lad der være givet en cirkel med centrum C og radius 1. I denne cirkel kan indskrives uendelig mange ligesidede trekanter. Fællesmængden for disse trekanter er en cirkel med centrum i C og radius $\frac{1}{2}$.

Hvis det om mængderne A og B gælder, at $A \cap B = \emptyset$, siges A og B at være *disjunkte*. Hvis enhver af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ er disjunkt med enhver anden af disse mængder, siges mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ at være *parvis disjunkte*.

5.7 eksempel. Når Z_- betegner mængden af negative hele tal, er mængderne $Z_+, Z_-, \{0\}$ parvis disjunkte.

5.8 eksempel. Idet k er et vilkårligt helt tal, definerer vi en mængde M_k ved

$$M_k = \{x \in R \mid k \leqq x < k+1\}.$$

Herved er der defineret et uendeligt system af mængder

$$\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots.$$

Man ser, at disse mængder er parvis disjunkte.

6. Lad der atter være givet to mængder A og B. Mængden af de objekter, der er element i mindst én af de to mængder A og B, kaldes *foreningsmængden* for A og B. Denne mængde betegnes med $A \cup B$. På fig. (6.1) er foreningsmængden $A \cup B$ angivet ved skravering.

Det er klart, at

$$A \cup B = B \cup A. \qquad (6.1)$$

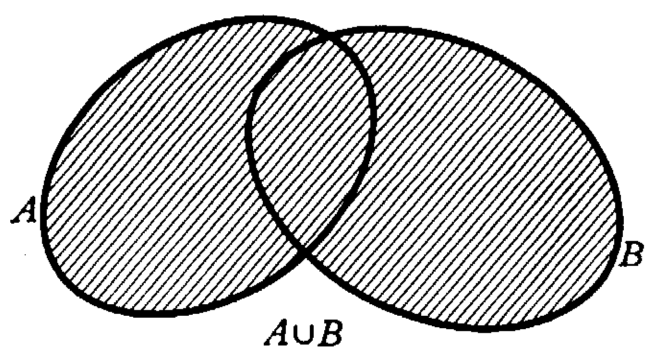

Fig. 6.1

Endvidere ser man let, at

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \tag{6.2}$$

thi både venstre og højre side af (6.2) er lig med mængden af de objekter, der er element i mindst én af mængderne A, B og C. Man benytter betegnelsen $A \cup B \cup C$ for denne mængde. Mere generelt lader man symbolet

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

betegne mængden af de objekter, der er element i mindst én af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

6.3 øvelse. Tegn en figur, der illustrerer mængden $A \cup B \cup C$.

6.4 eksempel. For vilkårlige mængder A og B er

$$A \cup B \supseteq A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \emptyset = A.$$

6.5 øvelse. Tegn en figur, der viser to mængder A og B, om hvilke det gælder, at $A \cup B = A$.

6.6 eksempel. Når A, B og C er vilkårlige mængder, er

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{6.7}$$

hvilket vi kan indse således:

Hvis $x \in A \cap (B \cup C)$, er $x \in A$ og $x \in B \cup C$. Heraf slutter vi, at x tilhører mindst én af mængderne $A \cap B$ og $A \cap C$, så $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dette viser, at

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

På lignende måde vises den omvendte inklusion, og dermed er (6.7) bevist.

Vi kunne også overbevise os om rigtigheden af (6.7) ved betragtning af fig. (6.II), idet såvel venstre som højre side af (6.7) illustreres ved det på figuren skraverede område.

6.8 øvelse. Vis (ved figurbetragtning eller ved formelt ræsonnement), at

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

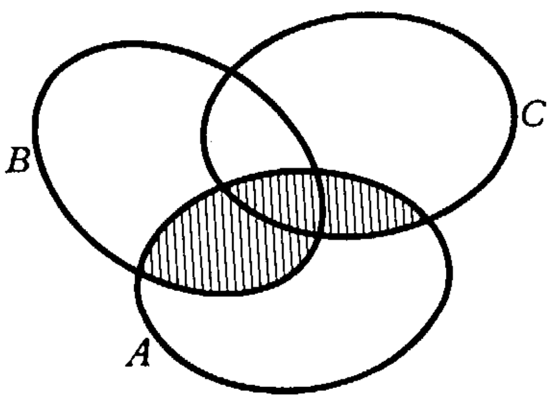

Fig. 6.II

Definitionen på begrebet foreningsmængde kan udvides til at omfatte et uendeligt system af mængder, idet vi her som før kalder mængden af de objekter, der tilhører mindst én af systemets mængder, for foreningsmængden.

6.9 eksempel. Foreningsmængden af de ligesidede trekanter, der blev omtalt i eksempel (5.6), er lig med mængden af punkter inden for eller på periferien af den givne cirkel.

7. Lad A være en given, ikke tom mængde, og lad

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \tag{7.1}$$

være et system af ikke tomme delmængder til A med den egenskab, at ethvert element i A tilhører en og kun én af delmængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (fig. (7.1)).

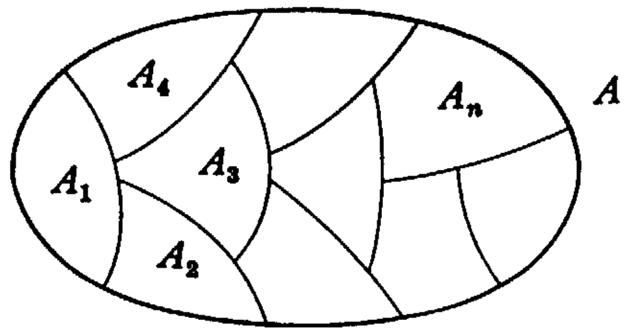

Fig. 7.1

Vi siger da, at (7.1) er en *klassedeling* af A, og de enkelte mængder i klassedelingen kaldes dens *klasser*. En klassedeling $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ af A kan åbenbart karakteriseres som et system af parvis disjunkte, ikke tomme delmængder, hvis foreningsmængde er lig med A.

7.2 eksempel. Mængdesystemet $\{Z_+, Z_-, \{0\}\}$ (eksempel (5.7)) er en klassedeling af Z.

***7.3 eksempel.** I definitionen på en klassedeling er det ikke nødvendigt at forlange, at det omtalte mængdesystem indeholder endeligt mange mængder. Således er det i eksempel (5.8) omtalte mængdesystem $\{\ldots, M_{-2}, M_{-1}, M_0, M_1, M_2, \ldots\}$ en klassedeling af R, thi ethvert reelt tal tilhører en og kun én af mængderne M_k.

8. Når A og B er givne mængder, kan vi betragte mængden af de elementer i A, der ikke er elementer i B. Denne mængde kalder vi *mængdedifferensen* mellem A og B, og vi betegner den med $A \setminus B$. Vi har altså, at

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}. \tag{8.1}$$

Hvis specielt $B \subseteq A$, kalder vi undertiden $A \setminus B$ for *komplementærmængden* af B med hensyn til A, og vi betegner den da med $\complement_A B$. På figurerne (8.I) og (8.II) er begreberne mængdedifferens og komplementærmængde illustreret, idet $A \setminus B$ og $\complement_A B$ er angivet skraveret.

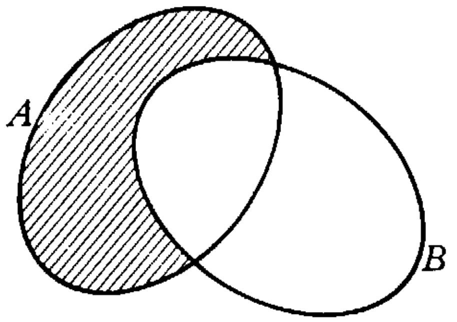

Fig. 8.I

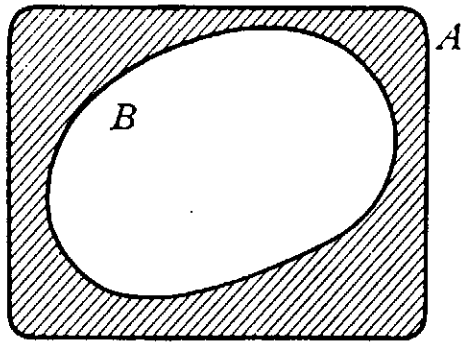

Fig. 8.II

8.2 eksempel. For vilkårlige mængder A og B er

$$A \setminus B \subseteq A, \quad A \setminus A = \emptyset, \quad A \setminus \emptyset = A\,.$$

8.3 øvelse. Tegn en figur, der viser to mængder A og B, om hvilke det gælder, at $A \setminus B = A$, og en figur, der viser to mængder A og B, om hvilke det gælder, at $A \setminus B = \emptyset$.

Ofte er det i en given sammenhæng naturligt udelukkende at beskæftige sig med delmængder til en vis fast mængde, der i så fald kaldes *grundmængden*. Når vi f.eks. arbejder med mængder af reelle tal, er talmængden R vor grundmængde. I plangeometrien er grundmængden ofte mængden af punkter i en given plan.

I situationer, hvor man udelukkende beskæftiger sig med delmængder til en grundmængde U, er det nærliggende at afkorte symbolet $\{x \in U \mid \ldots\}$ til $\{x \mid \ldots\}$. Endvidere afkorter man symbolet $\complement_U A$ til $\complement A$, og man kalder da mængden $\complement A$ for komplementærmængden til A.

8.4 eksempel. Hvis R er grundmængde, er

$$\complement\{x \mid x > 1\} = \{x \mid x \leqq 1\}\,.$$

8.5 eksempel. Hvis Z er grundmængde, har vi, at

$$\complement Z_+ = \{0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots\}.$$

Hvis derimod Q_+ er grundmængde, er $\complement Z_+$ lig med mængden af de positive rationale tal, der kan skrives som uforkortelig brøk med nævner større end 1.

8.6 eksempel. Hvis A og B er vilkårlige delmængder til en grundmængde U, er

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B\,, \tag{8.7}$$

hvilket vi kan indse således:

Hvis $x \in \complement(A \cap B)$, er $x \notin A \cap B$, så x tilhører mindst én af mængderne $\complement A$ og $\complement B$. Altså er $x \in \complement A \cup \complement B$. Hermed er vist, at $\complement(A \cap B) \subseteq \complement A \cup \complement B$. På lignende måde vises den omvendte inklusion, og dermed er (8.7) bevist.

8.8 øvelse. Lad A og B være to delmængder til en grundmængde U. Vis, at

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \quad \text{og} \quad \complement(\complement A) = A\,.$$

Vis endvidere (eventuelt ved figurbetragtning), at når $A \subseteq B$, er $\complement B \subseteq \complement A$, og omvendt.

Produktmængde

9. Lad A og B være to givne mængder. Vi betragter alle *par* af typen (a,b), hvor a på førstepladsen er et element i A, og b på andenpladsen er et element i B. Mængden af sådanne par kaldes *produktmængden* af A og B og betegnes med $A \times B$.

9.1 eksempel. Når $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{p, q\}$, er $A \times B$ en mængde med seks elementer,

$$A \times B = \{(1, p), (2, p), (3, p), (1, q), (2, q), (3, q)\}\,.$$

9.2 eksempel. Når $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ og $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, er $V \times L$ en mængde med 64 elementer. Disse elementer benyttes ofte som betegnelser for felterne på et skakbræt.

9.3 eksempel. Hvis mængden C består af ordene »plat« og »krone«, angiver elementerne i $C \times C$ de mulige udfald af to kast med en mønt,

$$C \times C = \{(\text{plat}, \text{plat}), (\text{plat}, \text{krone}), (\text{krone}, \text{plat}), (\text{krone}, \text{krone})\}\,.$$

Når M er en given mængde, benytter vi betegnelsen M^2 for produktmængden $M \times M$. Denne mængde består af alle par af formen (m_1, m_2), hvor m_1 og m_2 er elementer i M. Vi bemærker, at for vilkårlige elementer (m_1, m_2) og (n_1, n_2) tilhørende M^2 har vi, at

$$(9.4) \quad (m_1, m_2) = (n_1, n_2), \quad \text{når og kun når} \quad m_1 = n_1 \quad \text{og} \quad m_2 = n_2\,.$$

Hvis m og n er to forskellige elementer i M, er *parrene* (m,n) og (n,m) forskellige, mens derimod *mængderne* $\{m,n\}$ og $\{n,m\}$ er ens.

9.5 eksempel. Når $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, består T^2 af 36 talpar,

$$T^2 = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (6, 6)\}\,.$$

Disse talpar kan anskueliggøres som gitterpunkter i et kvadratnet (fig. (9.I) og (9.II)). På hver af de to figurer er fremhævet en delmængde til T^2, nemlig henholdsvis

$$\{(x, y) \in T^2 \mid x = y\} \quad \text{og} \quad \{(x, y) \in T^2 \mid x < y\}\,.$$

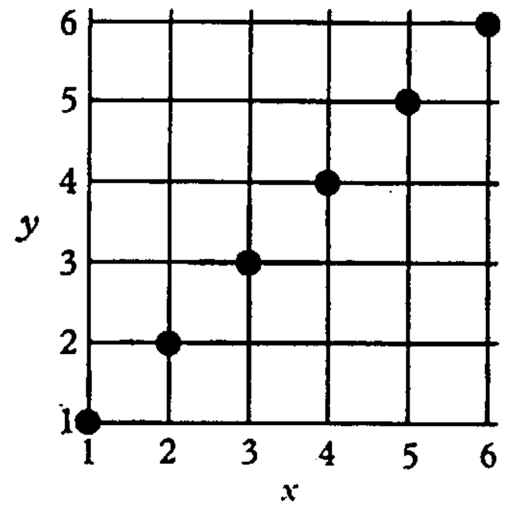

Fig. 9.I

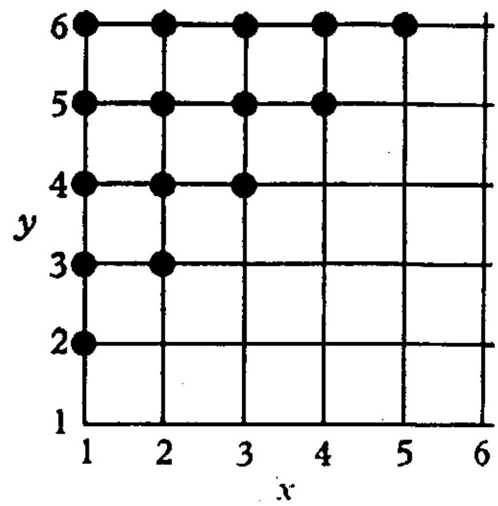

Fig. 9.II

9.6 øvelse. Tegn figurer, der anskueliggør mængderne

$$\{(x, y) \in T^2 \mid x+y = 7\} \quad \text{og} \quad \{(x, y) \in T^2 \mid x \text{ er et multiplum af } y\},$$

hvor $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Hvis A, B og C er tre givne mængder, kan vi betragte mængden af alle *elementsæt* (a,b,c), hvor $a \in A$, $b \in B$ og $c \in C$. Denne mængde kaldes produktmængden af A, B og C og betegnes med $A \times B \times C$. På tilsvarende måde kan vi danne produktmængden for flere end tre mængder.

Produktmængden for n mængder, der alle er lig med M, betegnes M^n. Elementerne i R^n kaldes *talsæt med n elementer*. Specielt kaldes elementerne i R^2 for *talpar* (undertiden også *ordnede talpar*). Som eksempler på talpar og talsæt kan bl.a. nævnes:

$$(3, -5), (2, -1), (0,0), (2,4,1), (1,4,2), (3,3,3),$$
$$(4, -1,5,2), (7,7,\tfrac{1}{2},5,9,2), (0,0,0,0,0,0,0,0).$$

Vi bemærker, at $(2,4,1) \neq (1,4,2)$, selv om $\{2,4,1\} = \{1,4,2\}$.

9.7 øvelse. Angiv tre forskellige talsæt i mængden

$$\{(x, y, z) \in R^3 \mid 2x+3y+5z = 6\}.$$

Findes der i denne mængde et talsæt, hvis tre elementer er ens?

Udsagn og udsagnsformer

10. I logikken benytter man almindeligvis ordet »udsagn« som betegnelse for en udtalelse, der enten er sand eller falsk. F.eks. er begge udtalelserne »$5 < 7$« og »$7 < 5$« udsagn. Det første af disse er sandt (har sandhedsværdien s), det andet er falsk (har sandhedsværdien f). Udtalelser som f.eks. spørgsmål, opfordringer eller udråb er ikke udsagn, idet de ikke har nogen bestemt sandhedsværdi.

Undertiden benytter vi bogstavbetegnelser for udsagn. Hvis vi således lader u og v betegne udsagnene

u: 3 er et primtal, v: 3 er et lige tal,

er u et sandt og v et falsk udsagn.

Ud fra givne udsagn p og q kan man danne nye udsagn på mange måder som f.eks.:

(10.1) »netop ét af udsagnene p og q er sandt«
(10.2) »p er sandt og q er falsk«
(10.3) »mindst et af udsagnene p og q er falsk«.

Så længe p og q ikke er specificerede udsagn, er udtalelserne (10.1-3) strengt taget ikke udsagn, idet de ikke har nogen bestemt sandhedsværdi; men når sandhedsværdierne for p og q opgives, kan vi straks finde sandhedsværdierne for de tre udtalelser. (10.1-3) kaldes derfor for *udsagnsformer*. Hvis p og q betegner udsagnene

$$p\colon\ 7 > 5, \qquad q\colon\ 3 > 5,$$

er de tre udsagn (10.1-3) sande; men hvis p og q betegner udsagnene

$$p\colon\ 5 > 7, \qquad q\colon\ 3 > 5,$$

er kun (10.3) sandt.

Sammenhængen mellem sandhedsværdierne for p og q og sandhedsværdierne for (10.1-3) er angivet i nedenstående tabeller, hvor der i kolonnerne for p og q står de mulige kombinationer af sandhedsværdier for p og q, mens der i sidste kolonne står den tilsvarende sandhedsværdi for det sammensatte udsagn. Disse tabeller kaldes *sandhedstabeller* for de pågældende udsagnsformer.

p	q	(10.1)
s	s	f
s	f	s
f	s	s
f	f	f

p	q	(10.2)
s	s	f
s	f	s
f	s	f
f	f	f

p	q	(10.3)
s	s	f
s	f	s
f	s	s
f	f	s

11. Hvis p og q er udsagn, er udtalelsen

(11.1) »både p og q er sande«

også et udsagn. (11.1) er derfor en udsagnsform. Den kaldes *konjunktionen* af p og q og betegnes med $p \wedge q$ (læs: p og q). Sandhedstabellen for $p \wedge q$ er:

p	q	$p \wedge q$
s	s	s
s	f	f
f	s	f
f	f	f

11.2 eksempel. Hvis p og q er udsagnene »7 er et helt tal« og »$7 > 3$«, er $p \wedge q$ udsagnet »7 er et helt tal større end 3«.

11.3 eksempel. Når p, q og r er udsagn, er også $p \wedge q$ og $(p \wedge q) \wedge r$ udsagn. Følgelig er $(p \wedge q) \wedge r$ en udsagnsform. Ved opskrivning af sandhedstabellen herfor må vi tage otte muligheder i betragtning:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
s	s	s	s	s
s	s	f	s	f
s	f	s	f	f
s	f	f	f	f
f	s	s	f	f
f	s	f	f	f
f	f	s	f	f
f	f	f	f	f

Man ser let, at udsagnsformerne $(p \wedge q) \wedge r$ og $p \wedge (q \wedge r)$ har samme sandhedstabel.

Hvis p er et udsagn, er også udtalelsen

(11.4) »p er falsk«

et udsagn. Dette udsagn kaldes *negationen* af p og betegnes med $\neg p$ (læs: »ikke p« eller »non p«). Vi har her at gøre med en udsagnsform, der kun omhandler ét udsagn p. Sandhedstabellen herfor er

p	$\neg p$
s	f
f	s

11.5 eksempel. Ved brug af symbolerne $\wedge$ og $\neg$ kan vi danne mange nye udsagnsformer som f.eks. $\neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q)$ og $\neg(p \wedge \neg q)$. Sandhedstabellen for $\neg(p \wedge \neg q)$ kan udarbejdes som antydet nedenfor:

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
s	s	f	f	s
s	f	s	s	f
f	s	f	f	s
f	f	s	f	s

På lignende måde finder vi sandhedstabellerne for $\neg p \wedge \neg q$ og $\neg(p \wedge q)$ til:

p	q	$\neg p \wedge \neg q$
s	s	f
s	f	f
f	s	f
f	f	s

p	q	$\neg(p \wedge q)$
s	s	f
s	f	s
f	s	s
f	f	s

11.6 eksempel. Udsagnsformen $\neg(\neg p)$ har åbenbart samme sandhedstabel som p, thi vi finder:

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
s	f	s
f	s	f

Når p og q er udsagn, er også udtalelsen

(11.7) »mindst et af udsagnene p og q er sandt«

et udsagn, så (11.7) er en udsagnsform. Den kaldes *disjunktionen* af p og q og betegnes med $p \vee q$ (læs: p eller q). Sandhedstabellen for $p \vee q$ er

p	q	$p \vee q$
s	s	s
s	f	s
f	s	s
f	f	f

11.8 eksempel. Da $(\sqrt{3}-2)^2 = 7-4\sqrt{3}$, er

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2 \quad \vee \quad \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

På lignende måde ser vi, at

$$\sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2 \quad \vee \quad \sqrt{9-4\sqrt{5}} = 2-\sqrt{5},$$

og at

$$\sqrt{8-4\sqrt{4}} = \sqrt{4}-2 \quad \vee \quad \sqrt{8-4\sqrt{4}} = 2-\sqrt{4}.$$

11.9 eksempel. Analogt med eksempel (11.5) kan vi nu danne sandhedstabeller for udsagnsformerne $\neg p \vee q$, $\neg p \vee \neg q$ og $\neg(p \vee q)$. Af bekvemmeligheds-hensyn sammenskriver vi disse tabeller i én tabel:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$
s	s	f	f	s	s	f	f
s	f	f	s	s	f	s	f
f	s	s	f	s	s	s	f
f	f	s	s	f	s	s	s

11.10 eksempel. Med læsemåden »p eller q« for udsagnet $p \vee q$ har vi fastlagt en bestemt betydning af glosen »eller«. I dagligsproget er brugen af vendingen »p eller q« svingende, idet den dels bruges for $p \vee q$, dels for $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$.

11.11 øvelse. Opskriv sandhedstabeller for udsagnsformerne $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$ og $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

12. Ved betragtning af sandhedstabellerne i eksemplerne (11.5) og (11.9) ses, at udsagnsformerne $\neg(p \wedge \neg q)$ og $\neg p \vee q$ har samme sandhedstabel. Vi siger derfor, at disse to udsagnsformer er *logisk ækvivalente*, og vi skriver

(12.1) $$\neg(p \wedge \neg q) \quad \text{ækv} \quad \neg p \vee q\,.$$

Formel (12.1) siger, at udsagnsformerne

»det er ikke sandt, at p er sandt og q er falsk«

og

»p er falsk eller q er sandt«

er logisk ækvivalente.

Af eksemplerne (11.5) og (11.9) fremgår også, at

$$\neg p \wedge \neg q \quad \text{ækv} \quad \neg(p \vee q) \qquad \text{og} \qquad \neg(p \wedge q) \quad \text{ækv} \quad \neg p \vee \neg q\,.$$

Af eksempel (11.6) ses, at

$$p \quad \text{ækv} \quad \neg(\neg p)\,.$$

12.2 øvelse. Godtgør, at der gælder:

$$p \vee q \quad \text{ækv} \quad \neg(\neg p \wedge \neg q), \qquad p \wedge q \quad \text{ækv} \quad \neg(\neg p \vee \neg q),$$
$$p \wedge p \quad \text{ækv} \quad p, \qquad p \vee p \quad \text{ækv} \quad p\,.$$

For visse udsagnsformer har det resulterende udsagn sandhedsværdien s, uanset de indgående udsagns sandhedsværdier. Dette gælder således for udsagnsformen $p \vee \neg p$. Udsagnsformer af denne art kaldes *tautologier*.

12.3 eksempel. Udsagnsformen $(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ er en tautologi. Dette kan man let overbevise sig om ved at formulere den i ord. Man kan også udarbejde sandhedstabellen:

p	q	$p \vee q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \vee q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
s	s	s	f	s
s	f	s	f	s
f	s	s	f	s
f	f	f	s	s

12.4 øvelse. Godtgør, at udsagnsformen

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

er en tautologi.

13. Idet p og q er to udsagn, vil vi nu se på udtalelsen

(13.1) »hvis p er sandt, er q sandt«.

Ved en omformulering af denne udtalelse kan vi se, at den kan opfattes som en udsagnsform, der kan udtrykkes ved hjælp af p og q i forbindelse med de allerede indførte logiske symboler (konjunktion, negation og disjunktion). Vi kan udtrykke (13.1) ved

»det er udelukket, at q er falsk, hvis p er sandt«,

og dette kan omformuleres til

»det er ikke sandt, at q er falsk og p er sandt«.

Heraf ses, at udtalelsen (13.1) kan tolkes som

$$\neg(p \wedge \neg q).$$

Udsagnsformen $\neg(p \wedge \neg q)$ kaldes en *implikation*. Som betegnelse herfor benytter man symbolet $p \Rightarrow q$ (læs: »p medfører q« eller »hvis p så q«). Undertiden benytter vi skrivemåden $q \Leftarrow p$ for denne udsagnsform.

Da symbolet $p \Rightarrow q$ betegner udsagnsformen $\neg(p \wedge \neg q)$, har vi iflg. (12.1), at

$$p \Rightarrow q \quad \text{ækv} \quad \neg p \vee q.$$

Udsagnsformen »p medfører q« er altså logisk ækvivalent med »p er falsk eller q er sandt«.

13.2 eksempel. Sandhedstabellen for udsagnsformen $p \Rightarrow q$ er iflg. eksempel (11.5):

p	q	$p \Rightarrow q$
s	s	s
s	f	f
f	s	s
f	f	s

Vi ser, at i de tilfælde, hvor udsagnene p og $p \Rightarrow q$ er sande, er også q sandt. Endvidere ser vi, at når p er falsk, er implikationen $p \Rightarrow q$ sand uanset sandhedsværdien af q. Man kan sige, at når p er falsk, er $p \Rightarrow q$ tomt opfyldt, thi man får ikke nogen oplysning om q ved at få at vide, at $p \Rightarrow q$ er sand og p er falsk.

13.3 eksempel. I matematikken kommer man ofte ud for den situation, at man om to udsagn p og q kan vise, at

(13.4) $$p \Rightarrow q\,.$$

Hermed har man *ikke* bevist, at q er sandt, og ej heller at p er sandt. Men hvis man desuden kan vise, at p er sandt, har man med (13.4) sikret, at q er sandt.

Hvis man på den anden side har vist, at (13.4) er sand og q er falsk, har man bevist, at p er falsk, thi med det beviste har man godtgjort, at man befinder sig i nederste linie i sandhedstabellen for $p \Rightarrow q$.

Den sidste bemærkning angiver princippet for et *indirekte* bevis, hvor man gør en antagelse p, som man ønsker at dementere ved at godtgøre, at den har en umulig konsekvens. I dagligsproget kan et indirekte bevis formuleres således:

$\sqrt{14}$ er ikke lig med 7, for så skulle 14 være lig med 7^2, og det er ikke sandt.

Dette ræsonnement kan også skrives således:

$$(\sqrt{14} = 7 \quad\Rightarrow\quad 14 = 7^2) \qquad \text{og} \qquad 14 \neq 7^2\,.$$

Altså er $\sqrt{14} \neq 7$.

13.5 øvelse. Godtgør, at

$$p \Rightarrow q \qquad \text{ækv} \qquad \neg q \;\Rightarrow\; \neg p\,.$$

***13.6 eksempel.** Hvis det om udsagnene p, q og r gælder, at implikationerne $p \Rightarrow q$ og $q \Rightarrow r$ er sande, kan r ikke være falsk samtidig med, at p er sandt. Altså er også implikationen $p \Rightarrow r$ sand. Som følge heraf tillader vi os ofte at skrive udsagnsformen $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ på den sammentrukne form

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r\,.$$

Udsagnsformen

(13.7) $$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q)$$

kaldes en *biimplikation*. Som betegnelse for (13.7) benytter vi symbolet $p \Leftrightarrow q$. Vi finder her følgende sandhedstabel:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
s	s	s	s	s
s	f	f	s	f
f	s	s	f	f
f	f	s	s	s

Heraf ses, at når p og q er to udsagn, betegner $p \Leftrightarrow q$ et udsagn, der er sandt hvis p og q har samme sandhedsværdi, falsk hvis p og q har hver sin sandhedsværdi. Vi kan derfor give $p \Leftrightarrow q$ de sproglige iklædninger »p er sandt, hvis og kun hvis q er sandt« eller »p er ensbetydende med q«.

13.8 eksempel. Vi har tidligere set, at udsagnsformerne $\neg p \vee \neg q$ og $\neg(p \wedge q)$ er logisk ækvivalente (har samme sandhedstabel). Heraf slutter vi nu, at udsagnsformen

$$\neg p \vee \neg q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(p \wedge q)$$

er en tautologi.

13.9 øvelse. Vis, at udsagnsformerne

$$p \Rightarrow p \quad \text{og} \quad p \Leftrightarrow p$$

er tautologier.

Åbne udsagn

14. En udtalelse som »$x < 7$« er ikke et udsagn, thi det kan ikke siges, om den er sand eller falsk. Hvis vi imidlertid indsætter et vilkårligt reelt tal i stedet for x, får vi et udsagn. Indsætter vi f.eks. 5 i stedet for x, får vi et sandt udsagn, og indsætter vi tallet 10, får vi et falsk udsagn. Vi kalder udtalelsen »$x < 7$« for et åbent udsagn om elementerne i R.

Ved et *åbent udsagn om elementerne i en mængde* M forstår vi en udtalelse, der indeholder en ubestemt størrelse med den egenskab, at hvis den ubestemte størrelse erstattes med et vilkårligt element fra M, fremkommer et udsagn.

Vi benytter ofte bogstavbetegnelser som f.eks. $p(x)$ for åbne udsagn. Det er da underforstået, at x betegner den ubestemte størrelse, der kan erstattes med elementer fra M.

14.1 eksempel. Lad $p(x)$ betegne følgende åbne udsagn om elementerne i Z_+:

$$p(x): \quad x \text{ er et primtal .}$$

Da betegner $p(3)$, $p(97)$ og $p(123)$ udsagnene »3 er et primtal«, »97 er et primtal« og »123 er et primtal«. Af disse udsagn er de to første sande og det tredie falsk.

Når $p(x)$ og $q(x)$ er åbne udsagn om elementerne i en mængde M, kan vi af disse danne nye åbne udsagn om elementerne i M som f.eks. $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $\neg p(x)$ og $p(x) \Rightarrow q(x)$. Det åbne udsagn $p(x) \wedge q(x)$ er bestemt ved, at når x erstattes med et vilkårligt element a i M, giver det udsagnet $p(a) \wedge q(a)$. På tilsvarende måde er de tre andre åbne udsagn fastlagt.

14.2 eksempel. Ulighederne

$$x \leqq 3, \quad 1 \leqq x, \quad x \leqq 4$$

kan opfattes som åbne udsagn om elementerne i R. Herved bliver udtalelserne

$$x \leqq 3 \wedge 1 \leqq x, \quad x \leqq 3 \vee x \leqq 4, \quad \neg (x \leqq 3)$$

ligeledes til åbne udsagn om elementerne i R. Disse kan også skrives:

$$1 \leqq x \leqq 3, \quad x \leqq 4, \quad x > 3 .$$

15. Lad $p(x)$ betegne et åbent udsagn om elementerne i en mængde M. I overensstemmelse med vedtægten i § 4 betegner symbolet

$$\{x \in M \mid p(x)\}$$

en delmængde til M, nemlig mængden af de elementer x i M, for hvilke $p(x)$ er sandt. Denne delmængde kaldes *sandhedsmængden* for det åbne udsagn $p(x)$.

15.1 eksempel. Ligningen

$$(x-1)(x-\tfrac{1}{2}) = 0$$

kan opfattes som et åbent udsagn om elementerne i R. Sandhedsmængden er da:

$$\{x \in R \mid (x-1)(x-\tfrac{1}{2}) = 0\} = \{\tfrac{1}{2}, 1\} .$$

I visse situationer kan man komme ud for at opfatte ligningen som et åbent udsagn om elementerne i Z_+. I så fald er sandhedsmængden:

$$\{x \in Z_+ \mid (x-1)(x-\tfrac{1}{2}) = 0\} = \{1\} .$$

15.2 øvelse. Lad $p(x)$ og $q(x)$ betegne åbne udsagn om elementerne i en mængde M, og lad P og Q betegne de tilsvarende sandhedsmængder.

Vis, at de åbne udsagn $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$ og $\neg\, p(x)$ har de sandhedsmængder, der er angivet i nedenstående skema:

åbent udsagn	sandhedsmængde
$p(x)$	P
$q(x)$	Q
$p(x) \wedge q(x)$	$P \cap Q$
$p(x) \vee q(x)$	$P \cup Q$
$\neg\, p(x)$	$M \setminus P$

15.3 eksempel. Når A er en vilkårlig delmængde til en mængde M, findes der et åbent udsagn om elementerne i M, der har A som sandhedsmængde, nemlig det åbne udsagn $x \in A$.

16. Når $p(x)$ er et åbent udsagn om elementerne i en mængde M, er udtalelsen

(16.1) »for alle x i M er $p(x)$ sandt«

et udsagn. For dette udsagn benytter vi symbolet

$$(16.1') \qquad \forall x \in M: \quad p(x) .$$

Symbolet $\forall$ angiver således vendingen »for alle«; det siges derfor at repræsentere *al-kvantoren.* I stedet for læsemåden »for alle« kan vi benytte »for ethvert« eller »for vilkårligt«. Endvidere kan vi udtrykke (16.1′) ved at sige, at »for elementerne i M gælder formlen $p(x)$«.

16.2 eksempel. Som eksempler på sande udsagn af den her omtalte art kan nævnes:

$$\forall x \in R: \quad x^2 \geqq 0, \qquad \forall x \in R: \quad (x+1)^2 = x^2+2x+1 ,$$
$$\forall x \in Q: \quad x^2 \neq 2, \qquad \forall x \in R: \quad (x > 0 \vee x < 1) .$$

Derimod er udsagnet

$$\forall x \in R: \quad x^2 \neq 2$$

falsk, thi der findes mindst et reelt tal, hvis kvadrat er lig med 2.

16.3 eksempel. Når $p(x)$ er et åbent udsagn om elementerne i en mængde M, betyder udsagnet

$$\forall x \in M: \quad p(x) ,$$

at sandhedsmængden for $p(x)$ er lig med M.

I visse tilfælde kan det være praktisk at karakterisere grundmængden på en anden måde, end det er sket i de foregående eksempler. Hvis vi f.eks. vil udtrykke, at for ethvert reelt tal x større end 1 er x^3 større end x^2, kan vi skrive

$$\forall x > 1: \quad x^3 > x^2 .$$

Vi har her i stedet for grundmængden angivet et åbent udsagn, der har grundmængden som sandhedsmængde. Det er i dette eksempel underforstået, at det pågældende åbne udsagn opfattes som et udsagn om reelle tal.

Hvis sammenhængen udelukker misforståelser, udelader man undertiden angivelsen af grundmængden. Hvis det f.eks. utvetydigt fremgår, at talen er om reelle tal, kan man skrive:

$$\forall x: \quad x^2 \geqq 0 ,$$

og dermed udtrykke, at kvadratet på et vilkårligt reelt tal er ikke-negativt.

17. Når $p(x)$ er et åbent udsagn om elementerne i en mængde M, er udtalelsen

(17.1) »der findes i M mindst ét x, for hvilket $p(x)$ er sandt«

et udsagn. For dette udsagn benytter vi symbolet

$$\exists x \in M: \quad p(x)\,. \tag{17.1'}$$

Symbolet $\exists$ angiver således vendingen »der eksisterer«; det siges derfor at repræsentere *eksistens-kvantoren.*

17.2 øvelse. Formuler hvert af følgende udsagn i ord og angiv deres sandhedsværdi:

(1) $\exists x \in R: \quad x^2 > 0$

(2) $\forall x \in R: \quad x^2 > 0$

(3) $\exists x \in R: \quad (x > 0 \wedge x^4 > x^5)$

(4) $\forall x \in R: \quad (x > 0 \vee x^4 > x^5)$.

17.3 eksempel. Når $p(x)$ er et åbent udsagn om elementerne i en mængde M, betyder udsagnet

$$\exists x \in M: \quad p(x)\,,$$

at sandhedsmængden for $p(x)$ ikke er tom.

Man indser let, at for ethvert åbent udsagn $p(x)$ om elementerne i en mængde M har de to udsagn

$$\neg(\forall x \in M: \quad p(x)) \qquad \text{og} \qquad \exists x \in M: \quad \neg p(x)$$

samme sandhedsværdi. Vi kan derfor skrive:

$$\neg(\forall x \in M: \quad p(x)) \quad \text{ækv} \quad \exists x \in M: \quad \neg p(x)\,. \tag{17.4}$$

Af lignende grund skriver vi:

$$\neg(\exists x \in M: \quad p(x)) \quad \text{ækv} \quad \forall x \in M: \quad \neg p(x)\,. \tag{17.5}$$

18. Af særlig interesse er udsagn af formen

$$\forall x \in M: \quad p(x) \Rightarrow q(x)\,, \tag{18.1}$$

hvor $p(x)$ og $q(x)$ er åbne udsagn om elementerne i M. (18.1) udsiger, at for enhver værdi af x, for hvilken $p(x)$ er sandt, er også $q(x)$ sandt. Dette udsagn kan udtrykkes således:

(18.1') »$p(x)$ medfører $q(x)$ inden for M« .

Når misforståelse er udelukket, tillader man sig ofte at udelade mængdebetegnelsen i (18.1). Således skriver man almindeligvis

$$x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 2$$

i stedet for

$$\forall x \in R: \quad x > 3 \quad \Rightarrow \quad x > 2 .$$

Derimod kan man ikke uden fare for misforståelse udelade mængdebetegnelserne i udsagnene

$$\forall x \in Z: \quad x > 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 > 8 ,$$
$$\forall x \in R_+: \quad x^2 > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 1 .$$

18.2 eksempel. Udsagnet

$$\forall\, x \in M: \quad p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

udsiger, at $q(x)$ er sandt for de og kun de værdier af x i M, for hvilke $p(x)$ er sandt. Dette udsagn kan også udtrykkes således: »$p(x)$ er ensbetydende med $q(x)$ inden for M«.

18.3 øvelse. Lad $p(x)$ og $q(x)$ betegne åbne udsagn om elementerne i en mængde M, og lad P og Q betegne de tilsvarende sandhedsmængder.

Vis, at udsagnet

$$\forall\, x \in M: \quad p(x) \Rightarrow q(x)$$

er sandt, når og kun når $P \subseteq Q$; og udsagnet

$$\forall\, x \in M: \quad p(x) \Leftrightarrow q(x)$$

er sandt, når og kun når $P = Q$.

19. Udtalelsen »$x<y$« kan beskrives som et åbent udsagn med de to ubestemte størrelser x og y; når vi indsætter to vilkårlige reelle tal i stedet for x og y, får vi et udsagn. Vi kalder »$x<y$« for et åbent udsagn med de to reelle variable x og y.

Ved et *åbent udsagn med to variable* bundet til henholdsvis mængden A og mængden B forstår vi en udtalelse, der indeholder to ubestemte størrelser med den egenskab, at når den første ubestemte størrelse erstattes med et element i A, og den anden erstattes med et element i B, fremkommer et udsagn. På lignende måde kan åbne udsagn med flere end to variable beskrives.

Et åbent udsagn med to variable, der er bundet til henholdsvis A og B, er åbenbart det samme som et åbent udsagn om elementerne i produktmængden $A \times B$. Man kalder også et sådant åbent udsagn for en *relation mellem elementerne i A og B* eller en *relation fra A til B*.

19.1 eksempel. Ligningen $y = 2x$ kan opfattes som et åbent udsagn med de to reelle variable x og y. Sandhedsmængden for dette udsagn kan skrives

$$\{(x, y) \mid y = 2x\} .$$

Eksempler på elementer i sandhedsmængden er talparrene $(1, 2)$, $(4, 8)$, $(-3, -6)$, $(\frac{1}{2}, 1)$. Sandhedsmængden kan beskrives som mængden af talpar af formen $(t, 2t)$, hvor t er et reelt tal. Vi kan udtrykke dette ved at skrive

$$\{(x, y) \mid y = 2x\} = \{(x, y) \mid \exists\, t \in R: \quad (x, y) = (t, 2t)\} .$$

Udtalelsen

$$a+b = b+a$$

er et åbent udsagn med de to reelle variable a og b. Da udtalelsen er sand for vilkårlige a og b, skriver vi:

$$\forall a \in R\, \forall b \in R: \quad a+b = b+a .$$

Af hensyn til overskueligheden sammentrækker vi ofte dette symbol til

$$\forall a, b \in R: \quad a+b = b+a .$$

På lignende måde sammentrækker vi symbolerne

$$\forall a \in R\, \forall b \in R\, \forall c \in R: \quad (a+b)+c = a+(b+c)$$
$$\forall a \in R\, \forall b \in R\, \forall n \in Z_+: \quad (ab)^n = a^n b^n$$

til

$$\forall a, b, c \in R: \quad (a+b)+c = a+(b+c) ,$$
$$\forall a, b \in R\, \forall n \in Z_+: \quad (ab)^n = a^n b^n .$$

Udtalelsen

$$x^2+y^2 = 1$$

kan opfattes som et åbent udsagn, hvor de variable x og y er bundet til Q_+. Da

$$(\tfrac{3}{5})^2+(\tfrac{4}{5})^2 = 1 ,$$

har vi, at

$$\exists x \in Q_+\, \exists y \in Q_+: \quad x^2+y^2 = 1 ,$$

eller lidt kortere skrevet

$$\exists x, y \in Q_+: \quad x^2+y^2 = 1 .$$

I mange matematiske sætninger optræder både eksistens- og alkvantorer. Som nedenstående eksempler viser, er *rækkefølgen* af de indgående kvantorer af væsentlig betydning.

19.2 eksempel. Ligningen

(19.3) $$x^2+a = 0$$

kan opfattes som et åbent udsagn med de to reelle variable x og a. For ethvert x findes der et a, så (19.3) er opfyldt. Vi kan derfor skrive

$$\forall x \in R \, \exists a \in R: \quad x^2+a = 0 .$$

Man ser endvidere, at følgende fire udsagn har de angivne sandhedsværdier:

$$\begin{array}{ll} \exists a \in R \, \forall x \in R: \quad x^2+a = 0 & \text{(falsk)}, \\ \forall a \in R \, \exists x \in R: \quad x^2+a = 0 & \text{(falsk)}, \\ \exists a \in R \, \forall x \in R: \quad x^2+a \neq 0 & \text{(sandt)}, \\ \exists x \in R \, \forall a \in R: \quad x^2+a \neq 0 & \text{(falsk)}. \end{array}$$

19.4 eksempel. Lad der være givet et åbent udsagn $p(x, y)$, hvor de to variable x og y er bundet til henholdsvis A og B; og lad q_1 og q_2 betegne de to udsagn

$$\forall x \in A \, \exists y \in B: \quad p(x,y) \quad \text{og} \quad \exists y \in B \, \forall x \in A: \quad p(x, y) .$$

q_1 siger, at til hvert $x \in A$ kan vi finde et $y \in B$, så $p(x, y)$ er sandt. Udsagnet q_2 siger, at der findes et element $y_0 \in B$, så $p(x, y_0)$ er sandt for alle $x \in A$. Hvis q_2 er sandt, er q_1 åbenbart også sandt, mens det omvendte ikke nødvendigvis er tilfældet.