3^{o} Vektorrum med indre produkt. Hilbertrum

3.1 Definition

Lad V være et vektorrum over de komplexe tal. Ved et indre produkt i V forstås en funktion $(\cdot,\cdot)$, som opfylder:

(i) $\forall\, x,y \in V : (x,y) = \overline{(y,x)}$.

(ii) $\forall\, x,y,z \in V : (x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

(iii) $\forall\, x,y \in V\ ,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}\ (\lambda x,y) = \lambda(x,y)$.

(iv) $\forall\, x \in V : x \neq 0 \Rightarrow (x,x) > 0$.

(Hvis V er et reelt vektorrum, siges $(.,.)$ at være et indre produkt, hvis (ii), (iv) og (i') : "$(x,y) = (y,x)$ for alle $x,y \in V$" er opfyldt).

Følgende sætninger er velkendte:

3.2 Sætning

Lad V være et vektorrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$. Funktionen $\|\cdot\|$ defineret ved

$$\forall\, x \in V \qquad \|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}.$$

er en norm i V .

3.3 Sætning (Cauchy Schwartz ulighed)

$\forall\, x,y \in V \quad |(x,y)| \leq \|x\|\ \|y\|$.

3.4 Definition

Lad H være et vektorrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$. H kaldes et Hilbertrum, hvis $(H, \|\cdot\|)$, hvor

$$\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$$

er et Banachrum.

3.5 Eksempler

1° Lad $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ være et målrum. Banachrummet $L_2(\mu)$ er et Hilbertrum med skalarproduktet

$$\forall f,g \in L_2(\mu) \qquad (f,g) = \int f\, \overline{g}\, d\mu$$

2° Som specialtilfælde af 1° betragter vi tilfældet, hvor μ er tællemålet på $\mathbb{N}$. Vi betegner da $L_2(\mu)$ med ℓ_2.

3° Lad $\Omega = \{1,2,\ldots n\}$ og lad μ være tællemålet. Vi betegner da $L_2(\mu)$ med ℓ_2^n.

4° Lad $\Gamma \neq \emptyset$ være en vilkårlig mængde og lad $\ell_2(\Gamma)$ bestå af alle komplekse funktioner f definerede på Γ og således at

(i) $\{x \in \Gamma \mid f(x) \neq 0\}$ er højst tællelig.

(ii) $\sum_{x\in\Gamma} |f(x)|^2 < \infty$.

Hvis vi definerer $(\cdot,\cdot)$ ved

$$\forall f,g \in \ell_2(\Gamma) \quad (f,g) = \sum_{x\in\Gamma} f(x)\, \overline{g(x)}$$

er $(\cdot,\cdot)$ et skalarprodukt og $\ell_2(\Gamma)$ er et Hilbertrum.

Det kan vises, at hvis μ er tællemålet på Γ, så er $\ell_2(\Gamma) = L_2(\mu)$.

Lad nu i det følgende H være et Hilbertrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$.

3.6 Definition.

Lad $x,y \in H$; hvis $(x,y) = 0$ siges x og y at være ortogonale, og vi skriver $x \perp y$. Hvis $A \subseteq H$ har egenskaben

$$\forall x,y \in A : x \neq y \Rightarrow x \perp y .$$

så siges A at være en ortogonalmængde.

Hvis alle elementer i A har norm 1 , siges A at være en ortonormal mængde.

Følgende sætning er velkendt.

<u>3.7 Sætning</u> (Bessel)

Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være en højst tællelig ortonormal følge i H . Der gælder da

(i) $\forall\, x \in H \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, x_k)\, x_k \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, x_k)|^2$$

(ii) $\forall\, x \in H \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} |(x, x_k)^2 \leq \| x \|^2$.

(iii) Hvis (x_n) er tællelig, så er

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)|^2 \leq \| x \|^2$$

og rækken

(iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)\, x_k$ er konvergent i H .

for ethvert $x \in H$.

Det eneste af den foregående sætning, som måske ikke er set før, er (iv), men det følger let af (i) - (iii) og følgende sætning:

<u>3.8 Sætning</u>

Lad (x_n) være en ortonormalfølge i H , og $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$. Der gælder da

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \text{ konvergent i } H \iff \sum |\lambda_n|^2 < \infty .$$

I bekræftende fald er

$$\| \sum_n \lambda_n x_n \|^2 = \sum |\lambda_n|^2 .$$

Bevis

Lad $n,m \in \mathbb{N}$ $n \leq m$, og sæt

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \quad \text{for alle } k \in \mathbb{N}$$

Vi har da

$$\| s_m - s_n \|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\lambda_k|^2 .$$

Af dette ses, at (s_k) er en Cauchyfølge, hvis og kun hvis $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$, men da H er fuldstændigt, følger første del af sætningen heraf. Anden del følger af, at

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n x_n \|^2 = \lim \| s_n \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 .$$

q.e.d.

Vi minder også om Gram-Schmidt's sætning.

3.9 Sætning

Lad $(y_n) \subseteq H$ være en følge af lineært uafhængige vektorer.

Der findes da en ortonormalfølge $(x_n) \subseteq H$, således at der for ethvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at

$$\text{span}\, \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \text{span}\, \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}.$$

3.10 Definition

En mængde $A \subseteq H$ kaldes total, hvis 0 er den eneste vektor i H , som er ortogonal på alle elementer fra A (d.v.s. $A^{\perp} = \{0\}$).

En følge $(x_n) \subseteq H$ kaldes en ortonormal basis for H , hvis og kun hvis (x_n) er total og ortonormal.

3.11 Sætning

Lad $(x_n) \subseteq H$ være en ortonormalfølge. Følgende udsagn er ækvivalente:

(i) (x_n) er en ortonormal basis.

(ii) $\forall x \in H : x = \sum_{n=1}^{\infty} (x,x_n)\, x_n$.

(iii) $\forall x,y \in H (x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x,x_n)\, \overline{(y,x_n)}$.

(iv) $\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x,x_n)|^2$.

Bevis

Det er let at se, at (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv). Antag, at (x_n) er en ortonormal basis. Fra sætning 3.7 følger, at rækken

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (x,x_n)\, x_n \quad \text{er konvergent i } H.$$

Vi finder nu for alle $n \in \mathbb{N}$

$$(y,x_n) = (x,x_n)$$

og derfor er $(y-x,x_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da (x_n) er total, er $x = y$. Dette viser (i) ⇒ (ii).

Antag, at (iv) er opfyldt, og lad $x \in H$, så $x \perp x_n$ for alle n . Det følger da, at $\|x\|^2 = 0$ og dermed er $x = 0$.
Vi har dermed vist (iv) ⇒ (i).

3.12 Eksempel

Definer $e_n = (0,0,\ldots 1,0,\ldots 0,\ldots)$ for alle $n \in \mathbb{N}$
n'te plads

Det er let at se, at (e_n) er en ortonormal basis for ℓ_2 .
$\{e_n \mid n \leq k\}$, kan opfattes som en ortonormal basis for ℓ_2^k
(hvis vi opfatter dette rum som underrum af ℓ_2)

3.13 Sætning

H er separabelt, hvis og kun hvis det har en ortonormal basis.

Bevis

Antag, at H er separabelt. Der findes da en følge $(z_n) \subseteq H$, så $\{\overline{z_n}\} = H$. $\{z_n\}$ er da total, thi lad $x \in H$ med $x \perp z_n$ for alle n og lad (z_{n_k}) være en delfølge, så $z_{n_k} \to x$.

Vi finder da

$$\| x - z_{n_k} \|^2 = \| x \|^2 + \| z_{n_k} \|^2 \quad \text{og dermed er}$$

$$\| x - z_{n_k} \|^2 \geq \| x \|^2 \quad \text{for alle } k .$$

Da $z_{n_k} \to x$, følger det, at $x = 0$.

Lad nu y_1 være det første z_n, som ikke er 0. Lad dernæst y_2 være det første z_n, som er lineært uafhængigt af y_1.
I det k'te trin lader vi y_k være det første z_n lineært uafhængigt af $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$.
(y_n) bliver da en endelig eller tællelig følge af lineært uafhængige vektorer. Da ethvert z_n er en linearkombination af visse af y_k'erne er (y_n) total. Ved Gram-Schmidt's metode finder vi nu en ortonormal basis for H.

3.14 Eksempel

Det følger af sætning 2.4, at $L_2(\mathbb{R})$ og $L_2(0,1)$ er separable.

4^{o} Projektionssætningen

Lad fortsat H betegne et Hilbertrum med skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$. Hvis $M \subseteq H$, $N \subseteq H$ er ikke-tomme delmængder, så siger vi, at M er ortogonal på N, hvis $(x,y) = 0$ for alle $x \in M$ og alle $y \in N$ og vi skriver $M \perp N$, og vi sætter

$$M^{\perp} = \{x \in H \mid x \perp M\}.$$

Det er let at se, at der gælder følgende sætning:

4.1 Sætning

Hvis $M \subseteq H$, $N \subseteq H$ $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$, så gælder

(i) $M^{\perp}$ er et lukket underrum af H.

(ii) $M \subseteq M^{\perp\perp}$

(iii) $M \subseteq N \rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

Før vi kan vise den næste sætning, får vi brug for følgende begreb:

4.2 Definition

Lad V være en vektorrum og $C \subseteq V$. C siges at være konveks, hvis der for alle $x,y \in C$ og alle $\alpha \in [0,1]$ gælder, at $\alpha x + (1-\alpha) y \in C$. Vi kan nu vise følgende vigtige sætning.

4.3 Sætning

Lad $C \subseteq H$ være en lukket konveks mængde. Der findes da til ethvert $x_o \in H$ et entydigt bestemt $y_o \in C$, således at

$$\| x_o - y_o \| = d(x_o, C).$$

<u>Bevis</u>

Lad os sætte $\delta = d(x_o, C)$, og lad $(y_n) \subseteq C$, således at

$||y_n - x_o|| \to \delta$. Vi ønsker at vise, at (y_n) er en Cauchyfølge.

For alle $n,m \in \mathbb{N}$ har vi :

$$||y_n - y_m||^2 = ||(y_n - x_o) + (x_o - y_m)||^2 = 2||y_n - x_o||^2 +$$

$$2||x_o - y_m||^2 - ||y_n + y_m - 2x_o||^2 =$$

$$2||x_o - y_n||^2 + 2||y_m - x_o||^2 - 4||\tfrac{1}{2}(y_n + y_m) - x_o||^2.$$

Da $\frac{1}{2}(y_n + y_m) \in C$ følger det, at

$$||y_n - y_m||^2 \leq 2||y_n - x_o||^2 + 2||y_m - x_o||^2 - 4\delta^2$$

hvoraf ses, at (y_n) er en Cauchyfølge. Vi kan altså finde et $y_o \in C$, så $y_n \to y_o$, og heraf følger umiddelbart, at

$||x_o - y_o|| = \delta$.

Lad nu $z \in C$, så $||x_o - z|| = \delta$. Vi finder da

$$||y_o - z||^2 = 2||y_o - x_o||^2 + 2||x_o - 2||^2 - 4||\tfrac{1}{2}(y_o + z) - x_o||^2$$

$$2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

så $y_o = z$.

q.e.d.

4.4 Sætning

Lad M og N være lukkede underrum af H, så $M \perp N$. Så gælder

(i) $M \cap N = \{0\}$ (d.v.s. M og N danner direkte rum)

(ii) $M \oplus N$ er lukket.

Bevis

(i) er klar, så lad os nøjes med at vise (ii). Lad $z_n = x_n + y_n$

$x_n \in M$, $y_n \in N$

således at $z_n \to z_o$. Vi finder

$$||z_n - z_m||^2 = ||x_n - x_m||^2 + ||y_n - y_m||^2 \qquad n,m \in \mathbb{N}$$

Heraf følger, at der findes et $x_o \in M$ og et $y_o \in N$, så

$x_n \to x_o$, $y_n \to y_o$, og derfor er

$$z_o = x_o + y_o \quad \in M \oplus N$$

q.e.d.

Vi kan nu vise

4.5 Sætning (Projektionssætningen)

Lad $M \subseteq H$ være et lukket underrum. Da gælder:

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Bevis

Lad $z \in H$, og lad $x \in M$ være bestemt således at $||z-x|| = d(z,M)$,

og sæt $y = z-x$.

Lad $v \in M$ være vilkårlig med $||v|| = 1$. Vi finder da

$$||y||^2 \leq ||z - (x + (y,v)v)||^2 = ||y - (y,v)v||^2 =$$

$$||y||^2 - |(y,v)|^2 \leq ||y||^2$$

hvoraf følger, at $(y,v) = 0$. Vi har dermed vist, at $y \in M^\perp$.

q.e.d.

4.6 Korollar

Lad $M \subseteq H$ være et underrum. Der gælder da $\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

Bevis

Af sætning 4.1 følger, at $M^{\perp\perp}$ er et lukket underrum, og at $M \subseteq M^{\perp\perp}$, derfor er $\overline{M} \subseteq M^{\perp\perp}$. Lad $z \in M^{\perp\perp}$. Idet det er trivielt, at $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, får vi fra sætning 4.5, at z kan skrives på formen:

$$z = x+y \quad x \in \overline{M}\ ,\quad y \in M^{\perp}$$

men så er

$y = z-x \in M^{\perp\perp}$ og dermed $(y,y) = 0$. Altså $z = x \in \overline{M}$

q.e.d.

4.7 Korollar

Lad $A \subseteq H$ være en ikke tom delmængde. $A^{\perp\perp}$ er da det mindste lukkede underrum, som indeholder A.

Bevis Prøv selv!!

4.8 Definition

En operator $P \in B(H)$ kaldes en ortogonalprojektion, hvis $P^2 = P$ og $P^{-1}(0) = P(H)^{\perp}$.

Følgende sætninger overlades til læseren.

4.9 Sætning

Lad $M \subseteq H$ være et lukket underrum. Der findes en entydigt bestemt ortogonalprojektion $P \in B(H)$, så $P(H) = M$.

4.10 Sætning

En projektion $P \in B(H)$ er en ortogonalprojektion i H, hvis og kun hvis $(Px,y) = (x,Py)$ for alle $x,y \in H$.

4.11 Sætning

Hvis $P \in B(H)$ er en ortogonalprojektion, så er $||P|| = 1$.

5^{o} Kontinuerte lineære funktionaler på et Hilbertrum.

Lad H være et Hilbertrum med dualt rum H^*.

Vi kan nu vise følgende sætning:

5.1 Sætning

Et lineært funktional z^* på H tilhører H^*, hvis og kun hvis der findes et entydigt bestemt $z \in H$, så

(*) $z^*(x) = (x,z)$ for alle $x \in H$.

Hvis $z^* \in H^*$ og z er som i (*), så er $||z^*|| = ||z||$.

Bevis

Lad først $z \in H$, og definer z^* ved $z^*(x) = (x,z)$ for alle $x \in H$.

Af Cauchy-Schwartz ulighed følger, at $z^* \in H^*$ og $||z^*|| \leq ||z||$.

Endvidere finder vi $||z||^2 = z^*(z) \leq ||z^*||\ ||z||$, hvilket giver $||z|| \leq ||z^*||$, så $||z|| = ||z^*||$.

Antag nu, at z^* også kan skrives på formen

$$z^*(x) = (x,z') \quad \text{for } x \in H .$$

Da er

$$0 = (x,z-z') \quad \text{for alle } x \in H$$

og dermed $z = z'$.

Lad dernæst $z^* \in H^*$ være vilkårlig, og sæt

$$N = \{x \in H \mid z^*(x) = 0\}.$$

Da z^* er kontinuert, er N et lukket underrum af H.

Hvis $N = H$, så er det klart, at $z = 0$ kan benyttes i $(*)$.
Hvis $N \neq H$, så er $N^{\perp} \neq \{0\}$, da $N^{\perp\perp} = N$, og vi kan derfor finde et $y \in N^{\perp}$, så $z^*(y) = 1$.
Lad $x \in H$. Det er let at se, at $x - z^*(x)\, y \in N$, og derfor er
$0 = (x - z^*(x)y, y) = (x,y) - z^*(x)||y||^2$.
Dette giver
$z^*(x) = (x, ||y||^{-2}y)$.

Da x var vilkårlig, har vi hermed vist, at $z = ||y||^{-2}y$ kan benyttes i $(*)$.

q.e.d.

5.2 Korollar

Afbildningen $T : H \to H^*$ defineret ved
$(Tz)(x) = (x,z)$ for alle $x \in H$, alle $z \in H$
er en entydig afbildning af H på H^*.
Den har egenskaberne

(i) $\forall z \in H \quad ||Tz|| = ||z||$.

(ii) $\forall z_1, z_2 \in H \quad T(z_1+z_2) = Tz_1 + Tz_2$

(iii) $\forall z \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad T(\lambda z) = \bar{\lambda}\, Tz$.

Bevis

klart.

En afbildning, som har egenskaberne (ii) og (iii) i 5.2 kaldes antilineær.