Opgaver til MM513

Niels Jørgen Nielsen

April 24, 2014

I det følgende betegner $\Omega, \mathcal{F}, P)$ et sandsynlighedsrum. Hvis X er en sv på $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, så lader vi $X(P)$ betegne billedmålet af X, d.v.s. fordelingen af X. Hvis μ og ν er to sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, lader vi $\mu \otimes \nu$ betegne produktmålet af μ og ν.

Opgave 1

Lad $\mathcal{G}$ være en del-σ-algebra af $\mathcal{F}$. En mængde $B \in \mathcal{G}$ med $P(B) > 0$ kaldes et atom i $\mathcal{G}$, hvis der gælder:

$$\forall A \in \mathcal{G} : A \subseteq B \Rightarrow P(A) = 0 \vee P(A) = P(B).$$

(i) Vis, at hvis Y er en $\mathcal{G}$–målelig stokastisk variabel, og B er et atom i $\mathcal{G}$, så er Y næsten sikkert konstant på B.

(ii) Vis, at hvis A og B er atomer i $\mathcal{G}$ med $P(A \setminus B) > 0$, så er $P(A \cap B) = 0$. Bortset fra nulmængden $A \cap B$ er A og B altså disjunkte.

Opgave 2

I denne opgave lader vi $\mathcal{G}$ betegne en endelig del–σ–algebra af $\mathcal{F}$.

(i) Vis, at hvis $A \in \mathcal{G}$ med $P(A) > 0$, findes der et atom B i $\mathcal{G}$ med $B \subseteq A$.

(ii) Vis, at hvis $A \in \mathcal{G}$ med $P(A) > 0$, gælder der:

$$A = \cup\{B \subseteq A \mid B \text{ atom i } \mathcal{G}\}.$$

Bemærk, at foreningsmængden er endelig.

(iii) Lad $\{B_j \mid 1 \leq j \leq n\}$ være et maximalt sæt af atomer i $\mathcal{G}$. Ifølge Opgave 1 (ii) taler vi omm samtlige atomer i $\mathcal{G}$ bortset fra tilføjelser eller fjernelse af nulmængder.

Lad $X \in L_1(P)$. Vis at

$$E(X \mid \mathcal{G}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P(B_j)} \int_{B_j} X dP \quad 1_{B_j}.$$

Vink: Vis, at højresiden opfylder den sædvanlige integralligning for middelværdier. Udnyt også, at ifølge (ii) er en vilkårlig mængde i $\mathcal{G}$ foreningsmængde af nogle af B_j'erne.

Opgave 3

Hvis Y er stokasisk variabel, lader vi som sædvanligt $\sigma(Y)$ betegne den mindste σ–algebra, hvori Y er målelig. Hvis $X, Y \in L_1(P)$ sætter vi $E(X \mid Y) = E(X \mid \sigma(Y))$.

(i) Vis, at hvis $X, Y \in L_1(P)$ er uafhængige, så er $E(X \mid Y) = E(X)$.

Vink: Benyt, at $\omega \to E(X)$ er $\mathcal{G}$–målelig. Lad være med at benytte DW Sætning (9.7 (k))!

(ii) Find et eksempel på stokastiske variable X og Y, hvor der gælder, at $E(X \mid Y) = E(X)$, og hvor X og Y ikke er uafhængige.

Opgave 4

Lad X og Y være reelle stokastiske variable.

(i) Vis, at X og Y er uafhængige, hvis og kun hvis

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

for alle begrænsede Borelfunktioner $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Vink til "hvis" delen. Sæt $f = 1_A$ og $g = 1_B$, hvor A og B er vilkårlige Borelmængder.

(ii) Vis, at X og Y er uafhængige, hvis og kun hvis

$$E(f(X) \mid Y) = E(f(X))$$

l for alle begænsede Borelfunktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Opgave 5

Lad $1 \leq p < \infty$ og lad $\mathcal{G}$ være en del–σ–algebra af $\mathcal{F}$.

- Lad $X \in L_p(P)$. Brug Jensens ulighed til at vise, at $E(X \mid \mathcal{G}) \in L_p(P)$, og at $\|E(X \mid \mathcal{G})\|_p \leq \|X\|_p$.

(ii) Vis, at hvis $X \in L_\infty(P)$, så er $E(X \mid \mathcal{G}) \in L_\infty(P)$ med $\|E(X \mid \mathcal{G})\|_\infty \leq \|X\|_\infty$

(ii) Lad nu $1 \leq p \leq \infty$ og lad $(X_n) \subseteq L_p(P)$. $X \in L_p(P)$,således at $X_n \to X$ i $L_p(P)$. Vis, at $E(X_n \mid \mathcal{G}) \to E(X \mid \mathcal{G})$ i $L_p(P)$. Operationen $E(\cdot \mid \mathcal{G})$ er altså en kontinuert operation i $L_p(P)$.

Opgave 6

Lad $(\mathcal{F}_n)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$, lad (X_n) være en submartingale relativ til $(\mathcal{F}_n)$ og lad $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en konveks funktion.

(i) Brug Jensens ulighed til at vise, at hvis $\phi(X_n) \in L_1(P)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og ϕ er voksende, er $(\phi(X_n))$ en submartingale. Vis derefter, at hvis (X_n) er en martingale, så gælder konklusionen uden antagelsen om, at ϕ er voksende.

(ii) Lad $1 \leq p < \infty$ og antag, at $X_n \in L_p(P)$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og at (X_n) er en martingale. Vis, at $|X|^p$ er en submartingale.

(iii) Hvis $x \in \mathbb{R}$, sætter vi $x^+ = x$, hvis $x \geq 0$ og $x^+ = 0$, hvis $x < 0$. Lad $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være defineret ved $\phi(x) = x^+$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Redegør for (f.eks ved hjælp af en tegning), at ϕ er konveks. Vis dernæst, at (X_n^+) er en submartingale.

Opgave 7

Lad $(X_n) \subseteq L_1(P)$ være en følge af indbyrdes uafhængige, identisk fordelte stokastiske variable med middelværdi 0 og varians σ^2. Definer:

$$Y_n = (\sum_{k=1}^{n} X_k)^2$$

og

$$Z_n = Y_n - n\sigma^2$$

for alle $n \in \mathbb{N}$. Sæt for ethvert n $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k \mid 1 \leq k \leq n)$.

Vis, at (Y_n) er en submartingale, og at (Z_n) er en martingale.

Opgave 8

Lad $(\mathcal{F}_n)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$ og lad $X = (X_n)$ være en $(\mathcal{F}_n)$–tilpasset proces. (X_n) kaldes en lokal martingale, hvis der findes en følge (T_k) af endelige stoppetider med $T_k \uparrow \infty$ for $k \to \infty$ og således at $(X_{n \wedge T_k})$ er en martingale for ethvert $k \in \mathbb{N}$. Sådanne processer mødes ofte i matematisk finansiering.

Vis, at en lokal martingale (X_n), som er nedadtil begrænset, er en supermartingale. Vink: Brug Fatous lemma på passende vis.

Opgave 9

Lad $(\mathcal{F}_n)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$ og lad $X = (X_n)$ være en $(\mathcal{F}_n)$–tilpasset proces, således at $X_{n+1} - X_n$ er uafhængig af $\mathcal{F}_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Antag at $E(X_n) = E(X_1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis, at (X_n) er en martingale.

(ii) Antag at $(E(X_n))$ er en voksende følge. Vis at (X_n) er en submartingale.

(iii) Gæt selv det næste spørgsmål!!!

Opgave 10

Lad (r_n) være en følge af uafhængige stokastiske variable med $P(r_n = 1) = P(r_n = -1) = \frac{1}{2}$, og sæt $\mathcal{F}_n = \sigma(r_j; 1 \leq j \leq n)$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(i) Vis, at (r_n) er en ortonormalfølge i $L_2(P)$.

(ii) Lad $(t_n) \in \mathbb{R}$ være en vilkårlig følge, og sæt for ethvert $n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} t_k r_k$. Vis, at (S_n) er en martingale.

(iii) Vis at følgende udsagn er ækvivalente:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 < \infty$.
2. Rækken $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} t_k r_k$ konvergerer i $L_2(P)$.
3. Rækken $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} t_k r_k$ konvergerer i $L_1(P)$.
4. Rækken $S_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} t_k r_k$ konvergerer n.s.

(iv) Vis, at hvis en af betingelserne (og dermed alle) er opfyldt,så vil:

$$(\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2)^{\frac{1}{2}} = \|S\_\infty|_2$$

Opgave 11

Lad (r_n) være som i Opgave 10.

(i) Vis, at hvis $(t_k) \subseteq \mathbb{R}$ og $1 \leq p \leq 2$, så gælder:

$$\|\sum_{k=1}^{n} t_k r_k\|_p \leq (\sum_{k=1}^{n} t_k^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Resten af opgaven går ud på at vise, at der findes en konstant $A_1 > 0$, således at:

$$A_1(\sum_{k=1}^{n} t_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{k=1}^{n} t_k r_k\|_1$$

for alle $(t_k) \subseteq \mathbb{N}$ og alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi antager fra nu af, at der ikke findes en sådan konstant A_1 og vil gerne komme frem til en modstrid.

(ii) Gør klart, at antagelsen medfører, at der for alle $K > 0$ findes et $n \in \mathbb{N}$ og $(t_k)_{k=1}^n \subseteq \mathbb{R}$, således at:

$$\|\sum_{k=1}^n t_k r_k\|_1 \leq 1 \quad \sum_{k=1}^n t_k^2 \geq K$$

(iii) Sæt $p_0 = 0$. Vis ved induktion (og ved hjælp af (ii)), at der findes en strengt voksende følge $(p_n) \subseteq \mathbb{N}$ og en følge $(s_k) \subseteq \mathbb{R}$, således at:

$$\sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} s_k^2 \geq 2^{2n} \quad \text{for alle } n \geq 0$$

og

$$\|\sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} s_k r_k\|_1 \leq 1 \quad \text{for alle } n \geq 0.$$

(iv) For ethvert $n \geq 0$ og ethvert $p_n < k \leq p_{n+1}$ sætter vi $t_k = 2^{-n} s_k$. Vis, at $\sum_{n=0}^\infty \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} t_k r_k$ er konvergent i $L_1(P)$ og at $\sum_{k=1}^\infty t_k^2 = \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} t_k^2$ er divergent.

(v) Gør rede for, at dette er i modstrid med opgave 10. Vi har dermed vist eksistensen af A_1.

(vi) Vis, at der for alle $1 \leq p \leq 2$, alle $n \in \mathbb{N}$ og alle $(t_k) \subseteq \mathbb{R}$ gælder:

$$A_1(\sum_{k=1}^n t_k^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_{k=1}^n t_k r_k\|_p \leq (\sum_{k=1}^n t_k^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Denne ulighed kaldes Khintchines ulighed (for $1 \leq p \leq 2$). Ved et dualitetsargument kan man få en analog ulighed for $2 < p < \infty$. Det er vist af Uffe Haagerup, at den bedste valg af konstanten A_1 er $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Om dette kan vises ved hjælp af martingales ved jeg ikke.

Opgave 12

Lad $(M_n)_{n \geq 0}$ være en martingale, som er begrænset i $L_2(P)$, og definer M_∞ som i noterne. Vis, at $E(M_\infty \mid \mathcal{F}_n) = M_n$ for alle $n \geq 0$.

Opgave 13

Lad $(X_n) \subseteq L_2(P)$ være en følge af uafhængige stokastiske variable med $E(X_n) = 0$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Sæt $X_0 = 0$ og lad som sædvanlig $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k \mid 0 \leq k \leq n\}$. Vi sætter desuden $S_0 = 0$ og

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Som bekendt er $S = (S_n)$ en martingale.

(i) Vis, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder:

$$S_n^2 - S_{n-1}^2 = X_n S_n + X_n S_{n-1}.$$

(ii) Find Doob–dekompositionen af S^2. Vink: Man kan f.eks benytte formlen i noterne til bestemmelse af (A_n).

(iii) Hvis man ikke kender Doob–dekompostionen, kan man jo angribe det således (og gør det!!): Udregn $E(S_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Brug dette udtryk til at finde ud af, hvad der skal trækkes fra S_n^2 for at få en martingale.

Opgave 14

Lad $(X_n))$ være en $L_2(P)$–begrænset martingale, og sæt

$$X_\infty = \lim X_n.$$

Denne limes eksisterer jo n.s og i $L_2(P)$ ifølge noterne. Vis at (X_n^2) er en uniformt integrabel submartingale, og at

$$X_\infty^2 = \lim X_n^2 \quad \text{n.s. og i } L_1(P).$$

Vink: Vis først, at $E(X_\infty^2 \mid \mathcal{F}_n) \geq X_n^2$ n.s.

Opgave 15

Denne opgave er en generalisering af noternes Sætning 3.2. Lad $1 < p < \infty$ og lad (X_n) være en martingale, som er begrænset i $L_p(P)$, dvs $\sup_n E(|X_n|^p) < \infty$.

(i) Vis, at $X_\infty = \lim X_n$ eksisterer n.s. og i $L_1(P)$.

(ii) Vis at $E(X_\infty \mid \mathcal{F}_n) = X_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Vis, at $X_\infty \in L_p(P)$.

(iv) Vis, at $E(|X_\infty|^p \mid \mathcal{F}_n) \geq |X_n|^p$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og konkludér, at $(|X_n|^p)$ er uniformt integrabel.

(v) Brug konveksiteten af $|\cdot|^p$ til at vise, at

$$|X_\infty - X_n|^p \leq 2^{p-1}(|X_\infty|^p + |X_n|^p) \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}$$

og konkludér, at $(|X_\infty - X_n|^p)$ er uniformt integrabel. Vis dernæst, at $X_\infty = \lim X_n$ i $L_p(P)$.

Opgave 16

Lad $(X_n) \subseteq L_1(P)$ være en følge af uafhængige stokastiske variable og sæt $X_0 = 0$, $S_0 = 0$ og $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Som sædvanligt lader vi $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Find Doob–dekompositionen af (S_n).

Opgave 17

Lad $(\mathcal{F}_n)$ være en filtrering af $\mathcal{F}$, så alle P–nulmængder tilhører $\mathcal{F}_0$, og lad τ være en stoppetid. Vi lader desuden $\mathcal{F}_\tau$ være delmængden af $\mathcal{F}$ bestående af alle de $A \in \mathcal{F}$, for hvilke $A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n$ for alle $n \geq 0$.

1. Vis, at $\mathcal{F}_\tau$ er en σ–algebra.

2. Vis, at hvis σ er en stoppetid med $\sigma \leq \tau$ n.s., så er $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

3. Lad $(X_n)_{n \geq 0}$ være en proces, som er tilpasset filtreringen, og lad $\tau < \infty$ n.s. Vis, at X_τ er $\mathcal{F}_\tau$–målelig.

4. Antag nu yderligere, at $(X_n) \subseteq L_1(P)$, og at der findes et $M \in \mathbb{N}$, så $\tau \leq M$ n.s. Vis, at
$$|X_\tau| \leq \sum_{n=0}^{M} |X_n|,$$
og slut heraf, at $X_\tau \in L_1(P)$

I det følgende lader vi $(\mathcal{F}_n)$ være en filtrering, som opfylder betingelserne i Opgave 17.

Opgave 18 (optional sampling)

Lad (X_n) være en submartingale (med hensyn til $(\mathcal{F}_n)$), og lad σ og τ være begrænsede stoppetider med $\sigma \leq \tau$ n.s.

1. Vis, at hvis $m < k$ og $A \in \mathcal{F}_\sigma$, så er
$$\int_{A \cap (\sigma = m)} X_k dP \geq \int_{A \cap (\sigma = m)} X_m dP.$$

2. Vis, at $E(X_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma$. (Vink: Opskriv $X_\tau - X_\sigma$ som en martingale transform for passende C, og brug dette til at vise, at hvis $m \geq 0$, så er $\int_{A \cap (\sigma = m)} (X_\tau - X_\sigma) dP \geq 0$ og summér derefter over m.)

Det tilsvarende resultat for supermartingales viser, at man ikke kan vende et ikke–favorabelt spil til et favorabelt ved hjælp f begrænsede stoppetider.

Lad $0 < p \leq 1$, og lad $(X_n)_{n \geq 1}$ være en følge af uafhængige stokastiske variable, således at $P(X_n = 1) = p$ og $P(X_n = -1) = 1 - p$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Hvis $a \in \mathbb{R}$, sætter vi $X_0 = a$ og $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$ og i dette tilfælde $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$. Sammenlign dette med begyndelsen af afsnit 2 af noterne. (S_n) kaldes en simpel random walk med parameter p, startende i a. Hvis $p = \frac{1}{2}$, kaldes (S_n) symmetrisk.

Opgave 19

Lad $a, k \in \mathbb{N}$ med $a < k$, lad (S_n) være en simpel symmetrisk random walk, startende i a. Det følger af tidligere resultater, at (S_n) er en martingale. Vi lader endvidere

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 0 \quad \text{eller } S_n = k\}.$$

Det følger af noternes Proposition 2.6, at τ er en stoppetid. Det kan vises, at $P(\tau < \infty) = 1$.

1. Vis, at (S_n) og τ opylder betingelserne i opgave 27.

2. Vis, at $E(S_\tau) = a$.

3. Vis, at $P(S_\tau = k) = \frac{a}{k}$. (Vink: Opsplit $E(S_\tau)$ som sum af integralet over den mængde, hvor $S_\tau = 0$, og integralet over den mængde, hvor $S_\tau = k$.)

Bemærk, at $P(S_\tau = k)$ udtrykker sandsynligheden for, at du får k kroner ud af dit spil, inden du går fallit (dvs $S_\tau = 0$)!!

Opgave 20

Lad $0 < p < 1$, $p \neq \frac{1}{2}$, lad $a, k \in \mathbb{N}$ med $a < k$, og lad desuden (S_n) være en simpel random walk med med parameter p, startende i a. Lad endvidere (X_n) være defineret som ovenfor og sæt

$$Z_n = (\frac{1-p}{p})^{S_n} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N},$$

og lad

$$\tau = \inf\{n \geq 1 \mid S_n = 0 \quad \text{eller } S_n = k\}$$

1. Vis, at $E((\frac{1-p}{p})^{X_n}) = 1$ for alle $n \geq 1$, og slut heraf, at (Z_n) er en martingale.

2. Vis, at $E(Z_\tau) = (\frac{1-p}{p})^a$.

3. Vis, at $P(S_\tau = k) = P(Z_\tau = (\frac{1-p}{p})^k) = \frac{1-(\frac{1-p}{p})^a}{1-(\frac{1-p}{p})^k}$.

Opgave 21

Lad $X \in L_1(P))$ og lad $\mathcal{G}$ og $\mathcal{H}$ være del–σ–algebraer af $\mathcal{F}$. Lad endvidere $\mathcal{H}$ være uafhængig af $\sigma(X, \mathcal{G})$. Opgaver går ud på at vise, at

$$E(X \mid \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})) = E(X \mid \mathcal{G}). \tag{1}$$

Det er nok at vise (1) for $X \geq 0$. Hvorfor? Fra nu af antager vi altså, at $X \geq 0$.

1. Lad $G \in \mathcal{G}$ og $H \in \mathcal{H}$. Vis, at

   $$\int_{G \cap H} X dP = P(H) \int_G X dP$$

   og

   $$\int_{G \cap H} E(X \mid \mathcal{G}) dP = P(H) \int_G E(X \mid \mathcal{G}) dP,$$

   og konkludér, at

   $$\int_{G \cap H} X dP = \int_{G \cap H} E(X \mid \mathcal{G}) dP.$$

2. Vis, at

   $$\int_A X dP = \int_A E(X \mid \mathcal{G}) dP \quad \text{for alle } A \in \sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H}).$$

   Vink: Udnyt at $\{G \cap H \mid G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}\}$ udgør et passende frembringersystem for $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ og benyt de sædvanlige målteoretiske argumenter.

3. Konkludér af 2., at (1) gælder.

Opgave 22

Lad X være nomalt fordelt med middelværdi 0 og varians σ^2. Udregn $E(\exp(X))$ og variansen af $\exp(X)$.

Vink: Brug DW lemma 6.12 eller noternes sætning 5.4.

Opgave 23

Lad (B_n) være en stokastisk proces, som opfylder:

(i) $B_0 = 0$ n.s.

(ii) Hvis $0 \leq m \leq$, er $B_n - B_m$ normalfordelt med middelværdi 0 og varians $n - m$.

(iii) Hvis $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, så er $B_{n_1}, B_{n_2} - B_{n_1}, \cdots, B_{n_k} - B_{n_{k-1}}$ uafhængige.

(B_n) kaldes en diskret Browsnk bevægelse elller en diskret Wienerproces. Det er ikke helt let at vise dens eksistens, men det tager vi for givet. Bemærk, at der i (ii) står $n - m$ og **ikke** $(n-m)^2$!!

Vi sætter for ethvert $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n = \sigma(B_k, 0 \leq k \leq n)$.

1. Vis, at (B_n) er en martingale.

2. Find Doob–dekompositionen for (B_n^2).

3. Lad $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ og definér:

$$M_n = \exp(aB_n - \frac{1}{2}a^2 n) \quad \text{for alle } n \geq 0. \tag{1}$$

   Vis, at (M_n) er en martingale.

   Vink: Ikke noget med Jenser her! Skriv for $n \geq 1$

$$M_n = \exp(a(B_n - B_{n-1}) - \frac{1}{2}a^2)M_{n-1},$$

   og brug forudsætningerne og resultatet fra Opgave 22.

4. Vis, at der findes et $M_\infty \in L_1(P)$, så

$$M_n \to M_\infty \quad \text{n.s.}$$

5. Lad $\varepsilon > 0$ og sæt for ethvert $n \geq 0$ $b_n = a^{-1}(\frac{1}{2}a^2 n + \log \varepsilon)$. Gør rede for, at $(M_n \geq \varepsilon) = (B_n \geq b_n)$.

6. Vis, at for $a > 0$ vil

$$M_n \to 0 \quad \text{i sandsynlighed.}$$

   Konkludér heraf, at $M_\infty = 0$ n.s. Tilsvarende regninger kan gøres for $a < 0$.

7. Er (M_n) uniformt integrabel?

Opgave 24

Lad $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ være et målrum (μ er ikke nødvendigvis et endeligt mål) og lad $f : \Omega \to [0, \infty[$ være en $\mathcal{F}$–målelig funktion. Vi definerer ν ved:

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

1. Vis, at ν er et mål.

2. Lad $g : \Omega \to [0, \infty[$ være målelig. Vis, at

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f d\mu. \tag{2}$$

3. Lad nu $g : \Omega \to \mathbb{R}$ være en vilkårlig målelig funktion. Vis, at $g \in L_1(\nu)$, hvis og kun hvis $gf \in L_1(\mu)$ Vis dernæst, at i bekræftende fald gælder (2)

Opgave 25

Lad $B_n)$, $(\mathcal{F}_n)$ og (M_n) være defineret som i Opgave 23. Vi definerer endvidere processen (X_n) ved:

$$X_n = B_n - an \quad \text{for alle } n \geq 0. \tag{1}$$

I det følgende lader vi $N \in \mathbb{N}$ være fast og sætter

$$Q(A) = \int_A M_N dP \quad \text{for alle } A \in \mathcal{F}. \tag{2}$$

1. Vis, at Q er et sandsynlighedsmål med den egenskab, at der for alle $A \in \mathcal{F}$ gælder, at $Q(A) = 0$ hvis og kun hvis $P(A) = 0$.

2. Vis, at hvis $Y \in L_1(Q)$ og Y er $\mathcal{F}_n$–målelig for et n med $0 \leq n \leq N$, så er

$$\int_\Omega Y dQ = \int_\Omega Y M_n dP. \tag{3}$$

Resten af opgaven går ud på at vise, at $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ er en endelig Brownsk bevægelse i sandsynlighedsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

3. Lad $0 \leq m < n \leq N$ og lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en begrænset Borelfunktion. Vis, at

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(X_n - X_m) dQ &= \\ \int_\Omega f(B_n - B_m - a(n-m)) \exp(B_n - B_m - \frac{1}{2}a^2(n-m)) dP &= \\ (2\pi(n-m)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u - (n-m)a) \exp(-\frac{(u-(n-m)a)^2}{2(n-m)}) du &= \\ (2\pi(n-m))^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \exp(\frac{-u^2}{2(n-m)}) du. \end{aligned} \tag{4}$$

   Vink: Brug (3) og at $E(M_m) = 1$ samt Sætning 5.4 i noterne.

4. Konkludér af 3., at hvis $0 \leq m < n \leq N$, så er $X_n - X_m$ normalfordelt $N(0, n-m)$ i sandsynlighedsrummet $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$.

   Vink: Lad $x \in \mathbb{R}$ og sæt $f = 1_{]\infty, x]}$ i (4).

5. Lad $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k \leq N$, og lad $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \mathbb{R}$. Vis, at

$$Q(\cap_{j=1}^k (X_j - X_{j-1} \leq x_j)) = \prod_{j=1}^k Q(X_j - X_{j-1} \leq x_j), \tag{5}$$

   og slut heraf, at $X_1, X_{n_2} - X_{n_1}, \cdots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ er uafhængige.

   Vink: Vis (5) ved induktion. I det k'te trin kan med fordel skrive $M_{n_k} = M_{k-1} \exp(B_{n_k} - B_{n_{k-1}} - \frac{1}{2}a^2(n_k - n_{k-1}))$.

   Det er nu vist, at $\{X_n \mid 0 \leq n \leq N$ er en endelig Brownsk bevægelse.

6. Kan man lave den ovenstående konstruktion for hele $(X_n)_{n\geq 0}$ på en gang? Mere specifikt: Findes der et $M \in L_1(P)$ med $M > 0$ n.s., således at hvis vi sætter

$$Q(A) = \int_A M dP \quad \text{for alle } A \in \mathcal{F},$$

så er Q et sandsynlighedsmål med egenskaben, at

$$Q(A) = \int_A M_n dP \quad \text{for alle } n \text{ og alle } A \in \mathcal{F}_n?$$

Opgave 26

Lad $(X_n)_{n\geq O} \subseteq L_1(P)$ være en følge af uafhængige identisk fordelte stokastiske variable og sæt for ethvert $n \geq 0$ $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$ og $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \cdots, X_n)$.

1. Vis at hvis $E(X_0) = 0$, så er (S_n) en martingale.
2. Vis at hvis $E(X_0) > 0$, så er (S_n) en submartingale.
3. Gæt selv næste spørgsmål!!

Opgave 27

Lad $(X_n)_{n\geq 0}$ være en martingale med hensyn til filtreringen $(\mathcal{F}_n)$, og lad τ være en stoppetid med $P(\tau < \infty) = 1$. Antag yderligere, at der findes et M, således at $|X_n| 1_{(n\leq\tau)} \leq M$, altså at (X_n) eer begrænset op til tidspunktet τ.

1. Vis, at $|X_\tau| \leq M$ og slut, at $E(|X_\tau|) < \infty$.
2. Vis, at $E(X_{\tau\wedge n} \to E(X_\tau$ for $n \to \infty$, og brug DW 10.9 til at slutte, at $E(X_\tau) = E(X_0)$. (Vink: Skriv $X_{\tau\wedge n} = X_\tau 1_{(\tau\leq n)} + X_n 1_{(n<\tau)}$.)