Radon-Nikodyms sætning

I disse noter vil vi vise den vigtige Radon-Nikodym sætning. Vi lader Ω være en vilkårlig mængde og $\mathcal{S}$ en σ-algebra af delmængder af Ω. Vi starter med følgende definition

Definition 1 *Lad μ være et mål på $\mathcal{S}$. μ siges at være koncentreret på mængden $B \in \mathcal{S}$, hvis $\mu(\complement B) = 0$.*

Definition 2 *Lad μ og ν være to mål på $\mathcal{S}$. ν siges ta være absolut kontinuert med hensyn til μ, betegnelse: $\nu \ll \mu$, hvis*

$$\forall A \in \mathcal{S} \colon \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0. \tag{1}$$

μ og ν kaldes singulære, betegnelse: $\mu \perp \nu$, hvis der findes disjunkte mængder $B_1, B_2 \in \mathcal{S}$, således at μ er koncentreret på B_1 og ν er koncentreret på B_2.

Eksempel 3 *Lad $f \in L_1(\mu)$, $f \geq 0$ og definér ν ved*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{S} \tag{2}$$

så er ν et mål, som er absolut kontinuert med hensyn til μ.

Radon-Nikodyms sætning udsiger bl.a., at hvis μ er et σ-endeligt mål og ν er et endeligt mål med $\nu \ll \mu$, så findes et $f \in L_1(\mu)$, $f \geq 0$, så (2) gælder.

Vi får brug for følgende definitioner og sætninger:

Definition 4 *Et mål μ på $\mathcal{S}$ kaldes σ-endeligt, hvis der findes en følge $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ med $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ og $\mu(\Omega_n) < \infty$.*

Det er let at se, at hvis μ er σ-endeligt, så kan vi finde en følge $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ med $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ for $n \neq m$ og $\mu(\Omega_n) < \infty$.

Hvis $f \in L_1(\mu)$, så vil vi altid sætte

$$\int f d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Lemma 5 *Lad μ og ν være mål på $\mathcal{S}$ og definér $\varphi \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ved*

$$\varphi(A) = \mu(A) + \nu(A) \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{S}. \tag{3}$$

Da er φ et mål på $\mathcal{S}$ og for alle målelige funktioner $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ gælder der:

$$f \in L_1(\varphi) \Leftrightarrow f \in L_1(\mu) \ \textit{ og } f \in L_1(\nu). \tag{4}$$

I bekræftende fald er

$$\int f d\varphi = \int f d\mu + \int f d\nu. \tag{5}$$

Bevis: Det følger umiddelbart af (3), at (4) og (5) gælder, hvis $f = 1_A$ med $A \in \mathcal{S}$, og heraf får vi af linearitetsgrunde, at (4) og (5) gælder, hvis f er en simpel målelig funktion. Lad nu $f \geq 0$ være målelig. Vi vil vise, at (5) gælder for f. Hvis (s_n) er en følge af simple, ikke negative funktioner, så $s_n \uparrow f$ n.o, så får vi fra det ovenstående og Lebesgues sætning om monoton konvergens:

$$\begin{aligned} \int f d\varphi &= \lim_{n\to\infty} \int s_n d\varphi = \lim_{n\to\infty} \left(\int s_n d\mu + \int s_n d\nu \right) \\ &= \int f d\mu + \int f d\nu, \end{aligned} \tag{6}$$

hvilket skulle vises.

Lad nu $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ være målelig. Da (5) gælder for ikke-negative målelige funktioner, vil

$$\int |f| d\varphi = \int |f| d\mu + \int |f| d\nu. \tag{7}$$

(7) giver umiddelbart, at $\int |f| d\varphi < \infty$, hvis og kun hvis både $\int |f| d\mu < \infty$ og $\int |f| d\nu < \infty$, hvilket netop er (4).

Lad nu $f \in L_1(\varphi)$ være reel og skriv $f = f^+ - f^-$. Ifølge det allerede viste er

$$\int f^+ d\varphi = \int f^+ d\mu + \int f^+ d\nu \tag{8}$$

$$\int f^- d\varphi = \int f^- d\mu + \int f^- d\nu. \tag{9}$$

Da $f \in L_1(\varphi)$ er alle indgående integraler endelige, og (5) fås ved at trække (9) fra (8).

Hvis $f \in L_1(\varphi)$ er kompleks, fås (5) ved at benytte, at den allerede gælder for $\mathrm{Re} f$ og $\mathrm{Im} f$. $\square$

Lemma 6 *Lad μ og ν være σ-endelige mål på $\mathcal{S}$. Der findes en følge $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ med $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ for $n \neq m$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega_n$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ og $\nu(\Omega_n) < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bevis: Da μ og ν er σ-endelige, findes $(\Omega'_n) \subseteq \mathcal{S}$ og $(\Omega''_n) \subseteq \mathcal{S}$, så $\Omega'_n \cap \Omega'_m = \emptyset$ og $\Omega''_n \cap \Omega''_m = \emptyset$ for alle $n \neq m$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega'_n = \bigcup_{n=1}^\infty \Omega''_n$, $\mu(\Omega'_n) < \infty$ og $\nu(\Omega''_n) < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Mængderne $\Omega'_n \cap \Omega''_m$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ er parvis disjunkte, $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{m=1}^\infty (\Omega'_n \cap \Omega''_m)$ og $\mu(\Omega'_n \cap \Omega''_m) < \infty$ og $\nu(\Omega'_n \cap \Omega''_m) < \infty$ for alle n, m. Vi kan derfor vælge (Ω_n) som en passende omordning af $\{\Omega'_n \cap \Omega''_m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Vi minder om følgende sætning fra Analyse:

Sætning 7 *Lad H være et Hilbertrum med indre produkt $(\cdot,\cdot)$. Hvis $F\colon H \to \mathbb{C}$ er et kontinuert lineært funktional, så findes et entydigt bestemt $y \in H$, så*

$$F(x) = (x, y) \quad \textit{for alle } x \in H, \tag{10}$$

$$\|F\| = \|y\|. \tag{11}$$

Eksempel 8 *Hvis μ er et mål på $\mathcal{S}$, så er $L_2(\mu)$ et Hilbertrum med det indre produkt*

$$(f, g) = \int f\bar{g}d\mu \quad \textit{for alle } f, g \in L_2(\mu). \tag{12}$$

Vi kan nu vise

Sætning 9 *(Radon-Nikodym) Lad μ og ν være σ-endelige mål på $\mathcal{S}$. Der findes da entydigt bestemte mål ν_a og ν_s på $\mathcal{S}$, således at*

$$\nu = \nu_a + \nu_s, \quad \nu_s \perp \nu_a, \quad \nu_s \perp \mu, \quad \nu_a \ll \mu. \tag{13}$$

Der findes desuden en målelig funktion $h \geq 0$ n.o, således at

$$\nu_a(A) = \int_A hd\mu \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{S}. \tag{14}$$

h er entydigt bestemt modulo "= n.o". Hvis ν er et endeligt mål, så vil $h \in L_1(\mu)$.

Bevis: Vi antager først, at $\mu(\Omega) < \infty$ og $\nu(\Omega) < \infty$. Sæt $\varphi = \mu + \nu$.

Hvis $f \in L_2(\varphi)$, så følger det af Lemma 5 og Cauchy-Schwarz' ulighed (Hölders ulighed med $p = 2$), at

$$\int |f|d\nu \leq \int |f|d\varphi \leq \varphi(\Omega)^{\frac{1}{2}}(\int |f|^2 d\varphi)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{15}$$

således at $f \in L_1(\nu)$. hvis yderligere $f_1 = f$ n.o. modulo φ, så vil også $f_1 = f$ n.o. modulo ν, og derfor vil $\int f_1 d\nu = \int f d\nu$. Dette viser, at vi kan definere en funktion $F\colon L_2(\varphi) \to \mathbb{C}$ ved

$$F(f) = \int f d\nu \quad \text{for alle } f \in L_2(\varphi). \tag{16}$$

F ses umiddelbart at være et lineært funktional. Af (15) fås endvidere for alle $f \in L_2(\varphi)$:

$$|F(f)| \leq \int |f|d\nu \leq \varphi(\Omega)^{\frac{1}{2}}||f||_2, \tag{17}$$

som viser, at F er et kontinuert lineært funktional med $||F|| \leq \varphi(\Omega)^{\frac{1}{2}}$. Sætning 7 og Eksempel 8 giver derfor, at der findes en funktion $g \in L_2(\varphi)$, således at

$$\int f d\nu = F(f) = \int fg d\varphi \quad \text{for alle } f \in L_2(\varphi). \tag{18}$$

Hvis $A \in \mathcal{S}$ er vilkårlig, så giver (18) med $f = 1_A$:

$$0 \leq \lambda(A) = \int 1_A d\nu = \int_A g d\varphi \tag{19}$$

således at $g \geq 0$ n.o. modulo φ (og derfor også modulo både μ og ν).

Lad $D = \{t \in \Omega \mid g(t) > 1\}$. Med $f = 1_D$ giver (18)

$$\int_D g d\varphi = \lambda(D) \leq \varphi(D). \tag{20}$$

Hvis $\varphi(D) > 0$ giver dette:

$$1 < \frac{1}{\varphi(D)} \int_D g d\varphi \leq 1,$$

hvilket er en modstrid. Altså er $\varphi(D) = 0$.Vi har dermed vist, at $0 \leq g \leq 1$ n.o. modulo φ (og derfor også modulo både μ og ν).

Da $\varphi = \mu + \nu$ kan (18) ved hjælp af Lemma 5 omskrives til

$$\int f(1-g) d\nu = \int f g d\mu \quad \text{for alle } f \in L_2(\varphi). \tag{21}$$

Lad B være mængden

$$B = \{t \in \Omega \mid g(t) = 1\} \tag{22}$$

og definér

$$\begin{aligned} \nu_a(A) &= \nu(A \cap \complement B) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S} & (23)\\ \nu_s(A) &= \nu(A \cap B) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S}. & (24) \end{aligned}$$

ν_a og ν_s er mål $\mathcal{S}$ med $\nu = \nu_a + \nu_s$, og det er også klart, at $\nu_a \perp \nu_s$. Hvis vi i (21) sætter $f = 1_B$, fås

$$0 = \int_B (1-g) d\nu = \int_B g d\mu = \mu(B), \tag{25}$$

hvilket viser, at μ er koncentreret på $\complement B$. Dermed er $\mu \perp \nu_s$. Lad os nu vise, at (14) gælder. Funktionen $h \colon \Omega \to \mathbb{R}$ defineres ved

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{1-g(x)} & \text{for alle } x \in \complement B \\ 0 & \text{for alle } x \in B \end{cases}. \tag{26}$$

Da $\mu(B) = 0$, er $h = \frac{g}{1-g}$ n.o. modulo μ, og yderligere er $h \geq 0$ n.o. modulo μ.

Lad nu $n \in \mathbb{N}$ og $A \in \mathcal{S}$ være vilkårlige og sæt $f = 1_A 1_{\complement B} \sum_{j=1}^{n} g^j$ i (21); vi får da

$$\int_{A \cap \complement B} (1 - g^{n+1}) d\nu = \int_{A \cap \complement B} \sum_{j=1}^{n+1} g^j d\mu. \tag{27}$$

Da $0 \leq g(x) < 1$ for n.a. $x \in \complement B$, vil $1 - g^{n+1}(x) \uparrow 1$ og $\sum_{j=1}^{\infty} g(x)^j = \frac{g(x)}{1-g(x)} = h(x)$ for n.a. $x \in \complement B$.

Lebesgues sætning om monoton konvergens anvendt på (27) giver derfor, at

$$\begin{aligned} \nu_a(A) &= \nu(A \cap \complement B) = \int_{A \cap \complement B} 1 d\nu = \lim_{n \to \infty} \int_{A \cap \complement B} (1 - g^{n+1}) d\nu \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{A \cap \complement B} \sum_{j=1}^{n+1} g^j d\mu = \int_{A \cap \complement B} h d\mu = \int_A h d\mu, \end{aligned} \tag{28}$$

hvor det sidste lighedstegn fås, da $\mu(B) = 0$. Vi har derfor vist, at (14) gælder. Hvis $A \in \mathcal{S}$ med $\mu(A) = 0$, så fås direkte af (14), at $\nu_a(A) = 0$, således at $\nu_a \ll \mu$. (14) viser desuden, at $h \in L_1(\mu)$. Vi har dermed vist sætningen i tilfældet, hvor ν og μ er endelige mål.

Lad os nu antage, at μ og ν er σ-endelige og lad $(\Omega_n) \subseteq \mathcal{S}$ være valgt, så $\Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset$ for $n \neq m$, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\mu(\Omega_n) < \infty$ og $\nu(\Omega_n) < \infty$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ definerer vi

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap \Omega_n) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S} \tag{29}$$

$$\nu_n(A) = \nu(A \cap \Omega_n) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S}. \tag{30}$$

ν_n og μ_n er endelige mål, og ifølge det allerede viste findes der mål ν_n^a og ν_n^s og målelige funktioner h_n, således at $\nu_n^a \perp \nu_n^s$, $\nu_n^a \ll \mu_n$, $\nu_n^s \perp \mu$ og

$$\nu_n = \nu_n^a + \nu_n^s \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N} \tag{31}$$

$$\nu_n^a(A) = \int_A h_n d\mu_n = \int_{A \cap \Omega_n} h_n d\mu. \tag{32}$$

Da ν_n er koncentreret på Ω_n, vil både ν_n^a og ν_n^s ligeledes være koncentrerede på Ω_n. Da også μ_n er koncentreret på Ω_n, følger det, at vi kan finde en mængde $B_n \in \mathcal{S}$, så $B_n \subseteq \Omega_n$, og ν_n^s er koncentreret på B_n, medens ν_n^a og μ_n begge er koncentrerede på $\complement B_n$. (32) viser desuden, at vi uden tab af generalitet kan antage, at $h_n(x) = 0$ for alle $x \in \complement \Omega_n$. Vi definerer nu:

$$\nu_a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^a(A) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S} \tag{33}$$

$$\nu_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^s(A) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S} \tag{34}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \quad \text{for alle } x \in \Omega. \tag{35}$$

Da $h_n(x) = 0$ for alle $x \in \complement \Omega_n$ giver (32)

$$\nu_n^a(A) = \int_{A \cap \Omega_n} h_n d\mu = \int_A h_n d\mu. \tag{36}$$

For ethvert $A \in \mathcal{S}$ får vi nu

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(A) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^a(A) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^s(A) = \nu_a(A) + \nu_s(A). \end{aligned} \tag{37}$$

(33) og (36) giver desuden ved brug af Lebesgues sætning om monoton konvergens, at

$$\begin{aligned} \nu_a(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^a(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A h_n d\mu \\ &= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} h_n d\mu = \int_A h d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{38}$$

Dette viser (14) samt at $\nu_a \ll \mu$.

For ethvert $k \in \mathbb{N}$ og ethvert $A \in \mathcal{S}$ finder vi

$$\nu_s(A \cap B_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^s(A \cap B_k) = \nu_k^s(A). \tag{39}$$

Lad nu $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. For alle $A \in \mathcal{S}$ har vi

$$\nu_s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^s(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_s(A \cap B_n) = \nu_s(A \cap B), \tag{40}$$

således at ν_s er koncentreret på B. Endvidere er

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(B_n) = 0 \tag{41}$$

således at $\mu \perp \nu_s$.

Endelig er

$$\nu_a(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_a(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^a(B_n) = 0 \tag{42}$$

så $\nu_a \perp \nu_s$.

Vi har nu vist eksistensen også i det σ-endelige tilfælde.

Lad os sluttelig vise entydigheden.

Lad os antage, at der ydereligere findes mål ν'_a og ν'_s, således at $\nu = \nu'_a + \nu'_s$ og $\nu'_a \perp \nu'_s$, $\nu'_a \ll \mu$ og $\nu'_s \perp \mu$. Vi kan finde mængder C_1 og C_2, så ν_s er koncentreret på C_1, ν'_s er koncentreret på C_2 og $\mu(C_1) = \mu(C_2) = 0$. Vi finder, at

$$\nu_a - \nu'_a = \nu'_s - \nu_s. \tag{43}$$

Sæt $C = C_1 \cup C_2$. Så vil $\mu(C) = 0$, og da både $\nu_a \ll \mu$ og $\nu'_a \ll \mu$, vil også $\nu_a(C) = \nu'_a(C) = 0$. Da både ν_s og ν'_s er koncentrerede på C får vi for ethvert $A \in \mathcal{S}$

$$\nu'_s(A) - \nu_s(A) = \nu'_s(A \cap C) - \nu_s(A \cap C) = \nu_a(A \cap C) - \nu'_a(A \cap C) = 0. \tag{44}$$

Altså er $\nu_s = \nu'_s$ og dermed også $\nu_a = \nu'_a$.

Antag nu, at h_1 er en målelig funktion, som også opfylder (14). For alle $A \in \mathcal{S}$ gælder da

$$\int_A h d\mu = \int_A h_1 d\mu \tag{45}$$

men så er $h = h_1$ n.o. □

Vi får umiddelbart

Korollar 10 *Lad μ og ν være σ-endelige mål på $\mathcal{S}$ med $\nu \ll \mu$. Der findes da en målelig funktion $h \geq 0$ n.o. modulo μ, således at*

$$\nu(A) = \int_A h d\mu \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{S}. \tag{46}$$

h er entydigt bestemt op til "= n.o." modulo μ.

Bevis: Klart. □

Følgende eksempel viser, at betingelsen σ-endelig ikke kan fjernes i Sætning 9.

Eksempel 11 *Lad λ være Lebesguemålet på $\mathbb{R}$ og μ tællemålet på $\mathbb{R}$, dvs. at for alle Borelmængder er*

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty \textit{ hvis } A \textit{ er uendelig} \\ \textit{antal elementer i } A, \textit{ hvis } A \textit{ er endelig}. \end{cases} \tag{47}$$

Da $\mathbb{R}$ ikke er tællelig, er μ ikke σ-endeligt. Hvis $\mu(A) = 0$, så er $A = \emptyset$, så $\lambda(A) = 0$. Vi har altså $\lambda \ll \mu$. Antag nu, at der findes en målelig funktion $h \geq 0$, så

$$\lambda(A) = \int_A h d\mu \quad \textit{for alle Borelmængder } A. \tag{48}$$

Lad $x \in \mathbb{R}$ være vilkårlig. Da er

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} h d\mu = h(x)$$

således at $h(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, men λ er jo ikke nulmålet.

Følgende sætning er meget nyttig.

Sætning 12 *Lad μ og ν være mål på $\mathcal{S}$, således at der findes en målelig funktion $h \geq 0$, således at*

$$\nu(A) = \int_A h d\mu \quad \text{for alle } A \in \mathcal{S}. \tag{49}$$

Der gælder:

$$f \in L_1(\nu) \Leftrightarrow fh \in L_1(\mu) \tag{50}$$

og

$$\int f d\nu = \int f h d\mu \quad \text{for alle } f \in L_1(\nu). \tag{51}$$

Bevis: Lad os vise, at (51) faktisk gælder for alle målelige funktioner $f \geq 0$. Hvis $f = 1_A$, så giver (49), at (51) gælder, og af linearitetsgrunde gælder (51) derfor også for ikke-negative simple funktioner. Lad nu $f \geq 0$ være målelig. Vi kan finde en følge (s_n) af simple ikke negative simple funktioner, så $s_n \leq s_{n+1}$ og $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ for alle $x \in \Omega$. Da

$$\int s_n d\mu = \int s_n h d\mu \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N} \tag{52}$$

og $s_n h \uparrow fh$ giver Lebesgues sætning om monoton konvergens, at

$$\int f d\nu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\nu = \lim \int s_n h d\mu = \int f h d\mu, \tag{53}$$

hvilket er (51).

Lad nu $f : \Omega \to \mathbb{C}$ være målelig. Ifølge det lige viste vil

$$\int |f| d\nu = \int |f| h d\mu. \tag{54}$$

Dette viser, at $\int |f| d\nu < \infty$, hvis og kun hvis $\int |f| h d\mu < \infty$. Dette viser, at (50) gælder.

Hvis $f \in L_1(\nu)$ er reel, så kan vi skrive $f = f^+ - f^-$ og får af (51)

$$\int f^+ d\nu = \int f^+ h d\mu \tag{55}$$

$$\int f^- d\nu = \int f^- h d\mu. \tag{56}$$

Da både $\int f^+ d\nu < \infty$ og $\int f^- d\nu < \infty$ kan vi trække (56) fra (55), hvilket giver, at (51) gælder for f. For at vise påstanden for en kompleks funktion $f \in L_1(\nu)$ benytter vi nu blot, at (51) gælder både for $\mathrm{Re} f$ og $\mathrm{Im} f$. □

Lad nu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ være et sandsynlighedsrum og $X : \Omega \to \mathbb{R}$ en stokastisk variabel. Lad $\hat{P}$ være fordelingen af X, dvs.

$$\hat{P}(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) \quad \text{for alle } A \in \mathcal{B}. \tag{57}$$

Definition 13 *X siges at have en tæthedsfunktion h, hvis*

$$\hat{P}(A) = P(X \in A) = \int_A h(x)dx \quad \textit{for alle } A \in \mathcal{B} \tag{58}$$

hvor h er en Borelmålelig funktion.

Vi kan nu vise

Sætning 14 *Lad λ betegne Lebesguemålet på $\mathbb{R}$. Følgende udsagn er ækvivalente.*

(i) X har en tæthedsfunktion.

(ii) $\hat{P} \ll \lambda$.

(iii) For alle $A \in \mathcal{B}$ gælder: $\lambda(A) = \emptyset \Rightarrow P(X \in A) = 0$.

Bevis: (iii) er blot definitionen på, at $\hat{P} \ll \lambda$, så (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Lad nu (i) gælde. Vi kan da finde en Borelmålelig funktion h, så (58) gælder, men så er $\hat{P} \ll \lambda$.

Antag derefter, at (ii) gælder. Korollar 10 giver, at der findes en Borelmålelig funktion h, så (58) gælder. □

Vi kan også nævne

Sætning 15 *Lad X have tæthedsfunktionen h. X har middelværdi, hvis og kun hvis*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| h(x)dx < \infty. \tag{59}$$

I bekræftende fald er

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x h(x)dx. \tag{60}$$

Bevis: Af lærebogen følger det, at

$$E|X| = \int |X| dP = \int_{-\infty}^{\infty} |x| d\hat{P}. \tag{61}$$

Da (58) gælder, viser sætning 12, at $\int_{-\infty}^{\infty} |x| d\hat{P} < \infty$, hvis og kun hvis $\int_{-\infty}^{\infty} |x| h(x) dx < \infty$. Dette viser påstanden.

Sætning 12 giver endvidere, at hvis $E|X| < \infty$, så vil

$$EX = \int_{\Omega} X dP = \int_{-\infty}^{\infty} x d\hat{P} = \int_{-\infty}^{\infty} x h(x) dx. \tag{62}$$

□