

Rødsorte træer, sletning

Rødsorte træer

Recap af definition:

- ▶ Rod og blade sorte.
- ▶ Samme antal sorte på alle rod-blad stier.
- ▶ Ikke to røde i træk på nogen rod-blad sti.

Det giver $O(\log n)$ højde:

Hvis antal sorte på alle stier er k , indeholder alle rod-blad stier mindst $k - 1$ kanter, og der er derfor mindst $k - 1$ fulde lag af indre knuder.

Derfor er $n \geq 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$.

Hvis der ikke er to røde knuder i træk, indholder den længste rod-blad sti højst $2(k - 1)$ kanter.

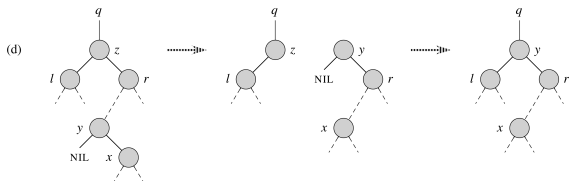
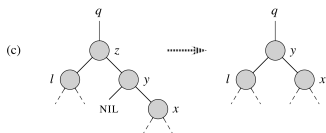
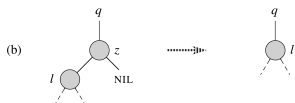
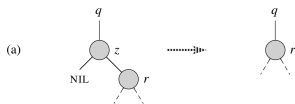
Så højde $\leq 2(k - 1) = 2k - 2 \leq 2 \log(n + 1) - 2$.

Sletning

1. Slet en knude i træet
2. Fjern evt. opstået ubalance (overtrædelse af rød-sort kravene).

Slet en knude i et binært træ

Strukturel ændring



Ubalance?

Der fjernes altså altid (strukturelt set) én knude. Dens ene barn er et blad (NIL), og det fjernes også.

Overtrædelse af rød-sortе krav?

- ▶ Rod og blade sorte.
- ▶ Samme antal sorte på alle rod-blad stier.
- ▶ Ikke to røde i træk på nogen rod-blad sti.

Fjernet knude rød:

Alle rød-sortе krav stadig overholdt

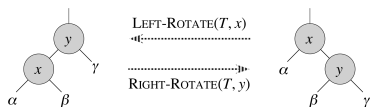
Fjernet knude sort:

Lad den fjernede knudes andet barn være "sværtet" og gælde for "een mere" sort end dens farve angiver.

Eneste mulige problem er nu én sværtet knude i træet. Lad dette være en invariant for en løkke som skubber problemet opad i træet indtil det kan fjernes.

Rebalancering

Plan: skub sværtet opad i træet, under brug af omfarvninger og rotationer:



- ▶ Sværtet knude er rød \Rightarrow sværtning kan fjernes ved at farve knuden sort.
- ▶ Sværtet knude er rod \Rightarrow sværtning kan bare fjernes.

Invariant:

- ▶ Højst én knude i træet er sværtet, og den er sort.
- ▶ Hvis sværtningen tælles med, er de rød-sortede krav overholdt.

Rotationer kan ikke ødelægge in-order i træet, så vi skal kun bekymre os om at vedligeholde invarianten.

Rebalancing

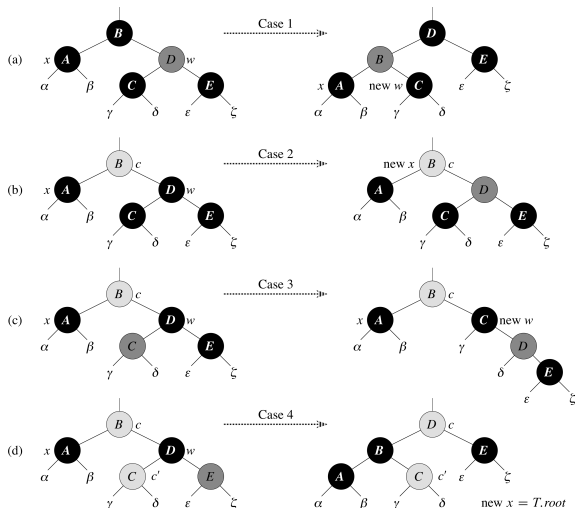
Mål: I $O(1)$ tid, fjern problemet eller skub det eet skridt nærmere roden.

Dette vil give rebalancing i $O(\text{højde}) = O(\log n)$ tid.

Cases for sværtet sort knude x med søskend w .

1. Rød søskend.
2. Sort søskend, og denne har to sorte børn.
3. Sort søskend, og dennes nærmeste barn er rødt, det fjerneste sort.
4. Sort søskend, og dennes fjerneste barn er rødt.

Cases i rebalancering



Her er x sværtet knude. Kontrollér at invariant vedligeholdes. Kontrollér $O(1)$ tid før sværtning fjernes eller flyttes eet skridt nærmere roden.