Korteste veje

Korteste veje i vægtede grafer

Længde af sti = sum af vægte af kanter på sti.

Korteste veje i vægtede grafer

Længde af sti = sum af vægte af kanter på sti.

$\delta(u, v)$ = længden af en korteste sti fra u til v. Sættes til ∞ hvis ingen sti findes.

Korteste veje i vægtede grafer

Længde af sti $=$ sum af vægte af kanter på sti.

$\delta(u, v) =$ længden af en korteste sti fra u til v. Sættes til ∞ hvis ingen sti findes.

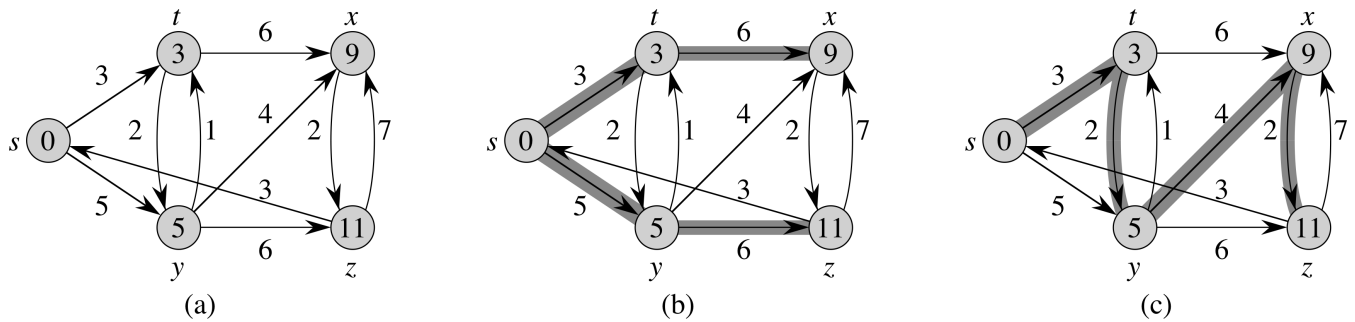
Single-source shortest-path problemet: Givet $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Korteste veje i vægtede grafer

Længde af sti = sum af vægte af kanter på sti.

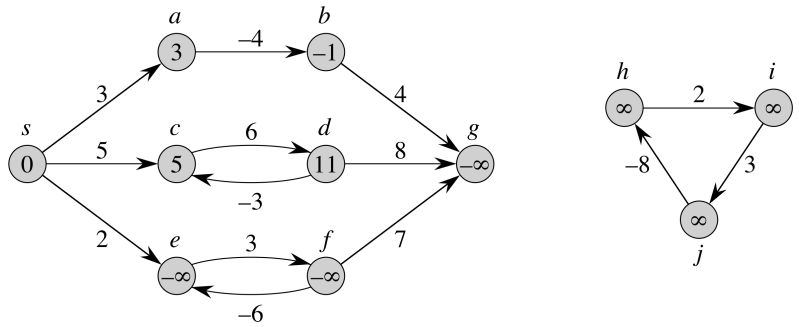
$\delta(u, v)$ = længden af en korteste sti fra u til v. Sættes til ∞ hvis ingen sti findes.

Single-source shortest-path problemet: Givet $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.



Korteste veje i vægtede grafer

Bemærk: problemet er ikke veldefineret hvis der findes kredse (som kan nås fra s) med negativ sum:



Omvendt: hvis der ikke findes sådanne negative kredse, kan vi nøjes med at så på simple stier (ingen knuder gentages). Der er et endeligt antal sådanne ($< n^n$, f.eks.), så "længde af korteste sti" er veldefineret.

Relaxation

INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)

for each $v \in G.V$

$v.d = \infty$

$v.\pi =$ NIL

$s.d = 0$

Relaxation

INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)

for each $v \in G.V$
  $v.d = \infty$
  $v.\pi = \text{NIL}$
$s.d = 0$

RELAX(u, v, w)

if $v.d > u.d + w(u, v)$
  $v.d = u.d + w(u, v)$
  $v.\pi = u$

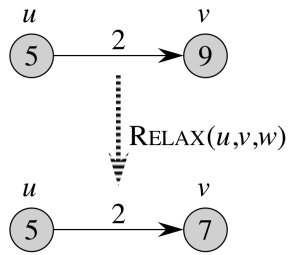
Relaxation

INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)

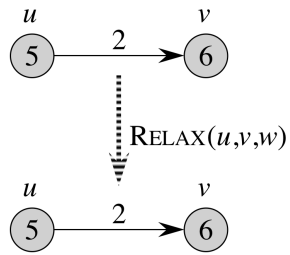
for each $v \in G.V$
  $v.d = \infty$
  $v.\pi = \text{NIL}$
$s.d = 0$

RELAX(u, v, w)

if $v.d > u.d + w(u, v)$
  $v.d = u.d + w(u, v)$
  $v.\pi = u$



(a)

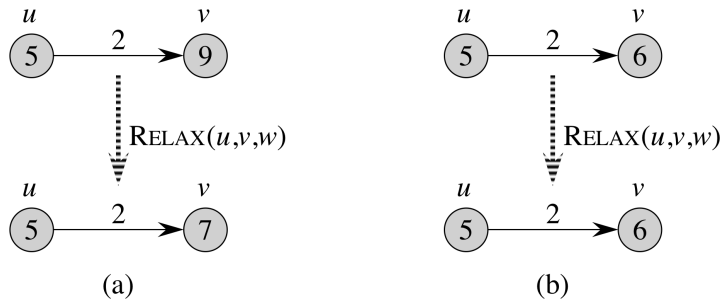


(b)

Relaxation

```
INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each v ∈ G.V
      v.d = ∞
      v.π = NIL
  s.d = 0
```

```
RELAX(u, v, w)
  if v.d > u.d + w(u, v)
      v.d = u.d + w(u, v)
      v.π = u
```



Invariant hvis man efter INIT-SINGLE-SOURCE kun ændrer $v.d$ og $v.\pi$ via RELAX:

> Hvis $v.d < \infty$ er der en sti fra s til v af længde $v.d$, og denne sti kan gennemløbes (baglæns) ved at følge π-pointere.

Bellman-Ford [1958]

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
          return FALSE
  return TRUE
```

Bellman-Ford [1958]

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
          return FALSE
  return TRUE
```

Køretid:

Bellman-Ford [1958]

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
          return FALSE
  return TRUE
```

Køretid: $O(nm)$

Bellman-Ford [1958]

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
          return FALSE
  return TRUE
```

Køretid: $O(nm)$

Sætning: Hvis der findes en negativ kreds, som kan nås fra s, svarer algoritmen FALSE. Ellers svarer den TRUE, og $v.d$ og $v.\pi$ er sat korrekt for alle $v \in V$ når den stopper.

Bellman-Ford [1958]

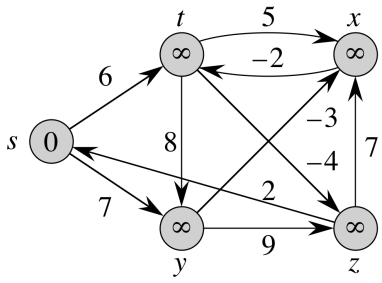
```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i = 1 to |G.V| − 1
      for each edge (u, v) ∈ G.E
          RELAX(u, v, w)
  for each edge (u, v) ∈ G.E
      if v.d > u.d + w(u, v)
          return FALSE
  return TRUE
```

Køretid: $O(nm)$

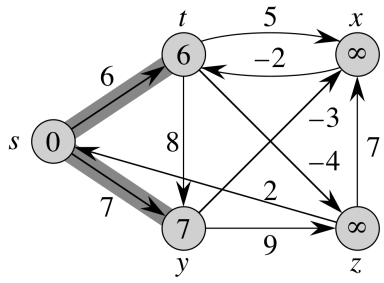
Sætning: Hvis der findes en negativ kreds, som kan nås fra s, svarer algoritmen FALSE. Ellers svarer den TRUE, og $v.d$ og $v.\pi$ er sat korrekt for alle $v \in V$ når den stopper.

Bevis: Invarianten er, at efter k iterationer af første for-løkke passer $v.d$ og $v.\pi$ værdierne for de korteste veje med højst k kanter.

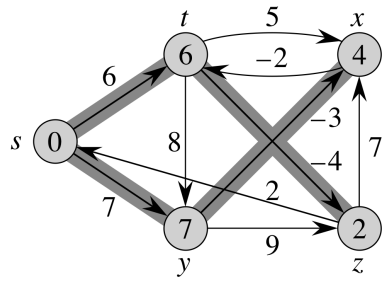
Bellman-Ford, eksempel



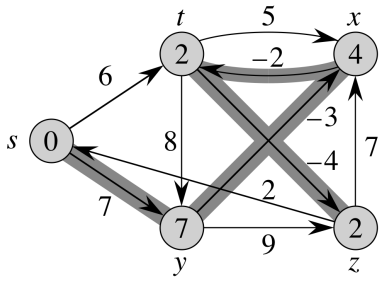
(a)



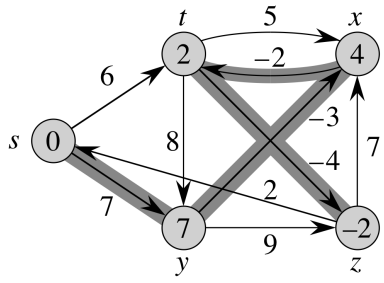
(b)



(c)



(d)



(e)

Dikjstras algoritme [1959]

Grådig algoritme som trinvis opbygger mængde S af knuder med korrekte $v.d$ og $v.\pi$. Bruger en prioritetskø Q. Kræver alle kantvægte ≥ 0.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V          // i.e., insert all vertices into Q
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Dikjstras algoritme [1959]

Grådig algoritme som trinvis opbygger mængde S af knuder med korrekte $v.d$ og $v.\pi$. Bruger en prioritetskø Q. Kræver alle kantvægte ≥ 0.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V          // i.e., insert all vertices into Q
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid:

Dikjstras algoritme [1959]

Grådig algoritme som trinvis opbygger mængde S af knuder med korrekte $v.d$ og $v.\pi$. Bruger en prioritetskø Q. Kræver alle kantvægte ≥ 0.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V          // i.e., insert all vertices into Q
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: n INSERT (eller een BUILD-HEAP), n EXTRACT-MIN og m DECREASE-KEY (i RELAX).

Dikjstras algoritme [1959]

Grådig algoritme som trinvis opbygger mængde S af knuder med korrekte $v.d$ og $v.\pi$. Bruger en prioritetskø Q. Kræver alle kantvægte ≥ 0.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V          // i.e., insert all vertices into Q
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: n INSERT (eller een BUILD-HEAP), n EXTRACT-MIN og m DECREASE-KEY (i RELAX). I alt $O(m \log n)$ hvis prioritetskøen implementeres med en heap.

Dikjstras algoritme [1959]

Grådig algoritme som trinvis opbygger mængde S af knuder med korrekte $v.d$ og $v.\pi$. Bruger en prioritetskø Q. Kræver alle kantvægte ≥ 0.

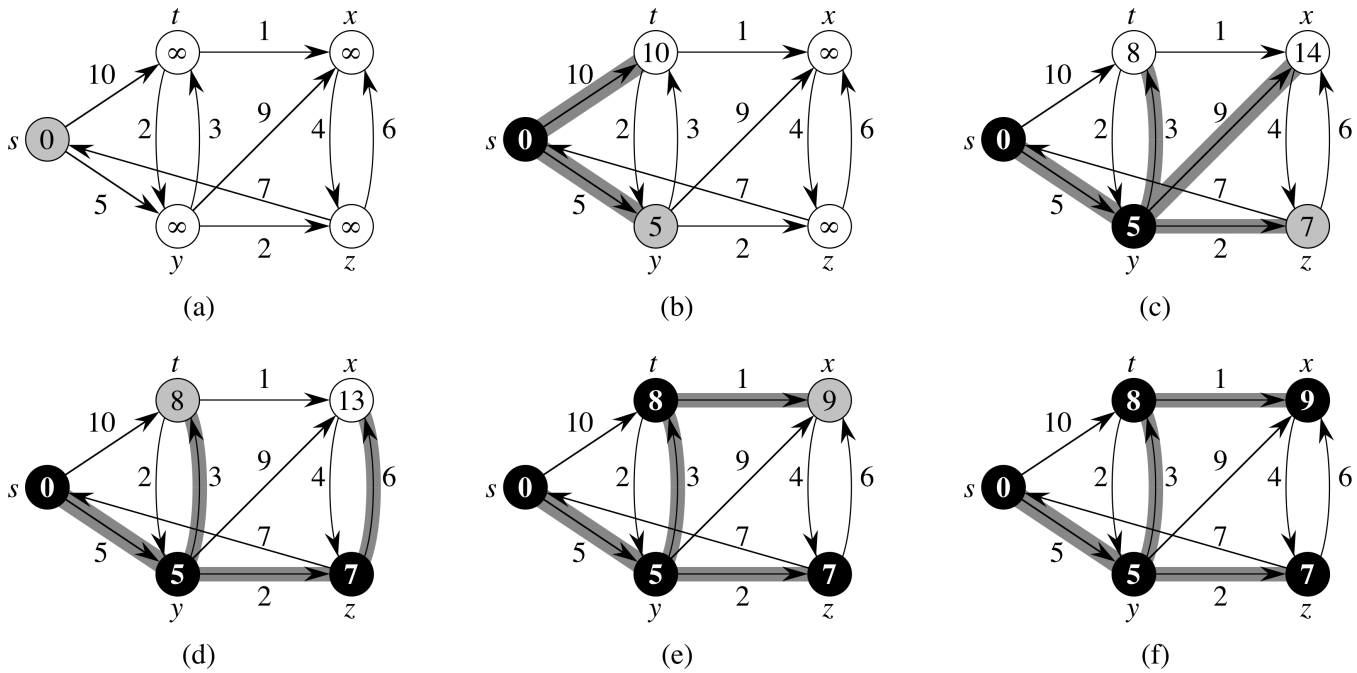
```
DIJKSTRA(G, w, s)
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  S = ∅
  Q = G.V          // i.e., insert all vertices into Q
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      S = S ∪ {u}
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: n INSERT (eller een BUILD-HEAP), n EXTRACT-MIN og m DECREASE-KEY (i RELAX). I alt $O(m \log n)$ hvis prioritetskøen implementeres med en heap.

Sætning: Når algoritmen stopper er $v.d$ og $v.\pi$ sat korrekt for alle $v \in V$ (hvis alle kantvægte er ≥ 0).

Bevis: næste gang.

Dijkstra, eksempel



Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n + m)$.

Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n+m)$.

DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
  topologically sort the vertices
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex u, taken in topologically sorted order
    for each vertex $v \in G.Adj[u]$
      RELAX(u, v, w)

Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n+m)$.

```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
  topologically sort the vertices
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex u, taken in topologically sorted order
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid:

Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n+m)$.

```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
  topologically sort the vertices
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex u, taken in topologically sorted order
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: $O(n+m)$.

Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n+m)$.

```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
  topologically sort the vertices
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex u, taken in topologically sorted order
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: $O(n+m)$.

Sætning: Når algoritmen stopper er $v.d$ og $v.\pi$ sat korrekt for alle $v \in V$.

Algoritme for DAGs [unknown]

Recall: DAG = Directed Acyclic Graph.

Recall: En topologisk sortering kan findes via DFS i tid $O(n+m)$.

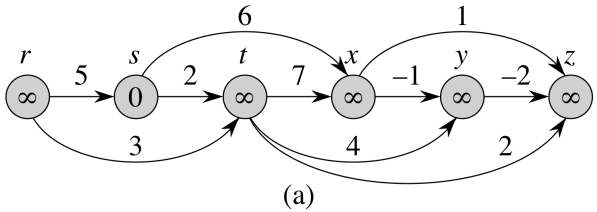
```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
  topologically sort the vertices
  INIT-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for each vertex u, taken in topologically sorted order
      for each vertex v ∈ G.Adj[u]
          RELAX(u, v, w)
```

Køretid: $O(n+m)$.

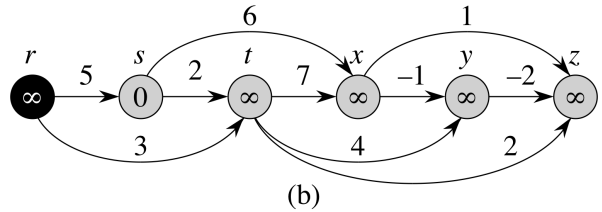
Sætning: Når algoritmen stopper er $v.d$ og $v.\pi$ sat korrekt for alle $v \in V$.

Bevis: invarianten er at når den ydre for-løkke når til knude u, er $v.d$ og $v.\pi$ sat korrekt for alle tidligere knuder.

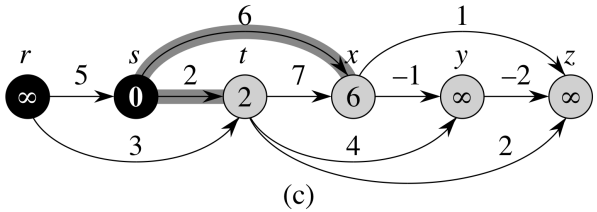
Algoritmen for DAG, eksempel



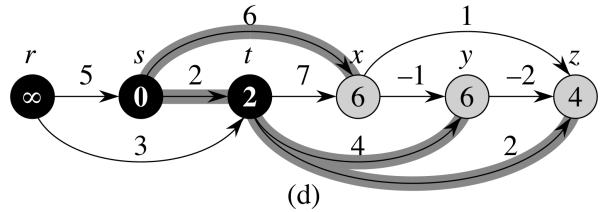
(a)



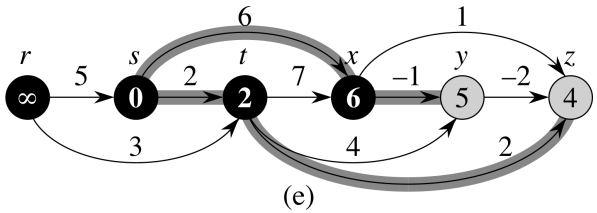
(b)



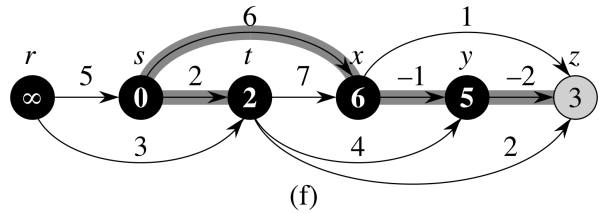
(c)



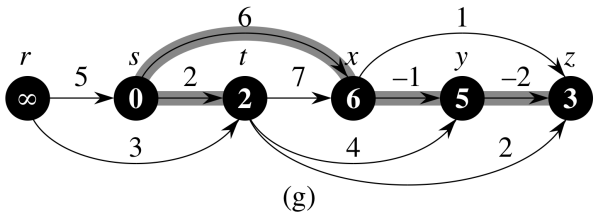
(d)



(e)



(f)



(g)

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Een mulighed: køre Dikjstra fra hver source $s \in V$:

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Een mulighed: køre Dikjstra fra hver source $s \in V$: $O(nm \log n)$ tid.

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Een mulighed: køre Dikjstra fra hver source $s \in V$: $O(nm \log n)$ tid.

En anden mulighed: Floyd-Warshalls algoritme. $O(n^3)$ tid.

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Een mulighed: køre Dikjstra fra hver source $s \in V$: $O(nm \log n)$ tid.

En anden mulighed: Floyd-Warshalls algoritme. $O(n^3)$ tid.

Bruger adjacency-matrix repræsentationen.

Output også på matrice-form:

$D = (d_{ij})$, $d_{ij} = \delta(v_i, v_j) =$ længden af en korteste sti fra v_i til v_j. Sættes til ∞ hvis ingen sti findes.

Korteste veje i vægtede grafer

All-pairs shortest-path problemet: For alle $s \in V$, find $\delta(s, v)$ (og en konkret sti) for alle $v \in V$.

Een mulighed: køre Dikjstra fra hver source $s \in V$: $O(nm \log n)$ tid.

En anden mulighed: Floyd-Warshalls algoritme. $O(n^3)$ tid.

Bruger adjacency-matrix repræsentationen.

Output også på matrice-form:

$D = (d_{ij})$, $d_{ij} = \delta(v_i, v_j) =$ længden af en korteste sti fra v_i til v_j. Sættes til ∞ hvis ingen sti findes.

$\Pi = (\pi_{ij})$, $\pi_{ij} =$ sidste knude før v_j på en korteste sti fra knude v_i til knude v_j. Sættes til NIL hvis ingen sti findes.

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ **to** n

  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

return $D^{(n)}$

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ **to** n

  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

return $D^{(n)}$

Køretid:

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ **to** n

  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

return $D^{(n)}$

Køretid: $O(n^3)$.

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ **to** n

  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

return $D^{(n)}$

Køretid: $O(n^3)$. Plads: $O(n^2)$ (kun forrige $D^{(k)}$ matrice behøves gemmes).

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)

$D^{(0)} = W$

for $k = 1$ **to** n

  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix

  for $i = 1$ **to** n

    for $j = 1$ **to** n

      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$

return $D^{(n)}$

Køretid: $O(n^3)$. Plads: $O(n^2)$ (kun forrige $D^{(k)}$ matrice behøves gemmes).

Sætning: Når algoritmen stopper er d_{ij} og π_{ij} sat korrekt for alle $v_i, v_j \in V$.

Floyd-Warshalls algoritme [1962]

Dynamisk programmeringalgoritme (kun konstruktion af D-matricen vises).

FLOYD-WARSHALL(W, n)
$D^{(0)} = W$
for $k = 1$ **to** n
  let $D^{(k)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)$ be a new $n \times n$ matrix
  for $i = 1$ **to** n
    for $j = 1$ **to** n
      $d_{ij}^{(k)} = \min\left(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right)$
return $D^{(n)}$

Køretid: $O(n^3)$. Plads: $O(n^2)$ (kun forrige $D^{(k)}$ matrice behøves gemmes).

Sætning: Når algoritmen stopper er d_{ij} og π_{ij} sat korrekt for alle $v_i, v_j \in V$.

Bevis: Invarianten er, at $D^{(k)}$ indeholder længden af korteste veje mellem v_i og v_j som passerer knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_k$ (udover endepunkterne v_i og v_j).

Floyd-Warshall, eksempel

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \text{NIL} & 4 & \text{NIL} & \text{NIL} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 4 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & \text{NIL} & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$