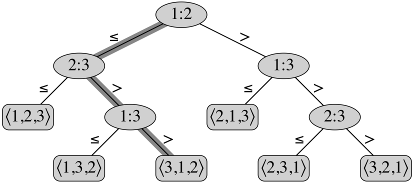
Sortering i lineær tid

Sammenligningsbaseret sortering

Nedre grænser kræver en præcis beregningsmodel.

Essentiel handling: ehvilke elementer, der sammenlignes. Essentielt svar: hvilken permutation står input i.

Model for sammenligningsbaserede sorteringsalgoritmer:

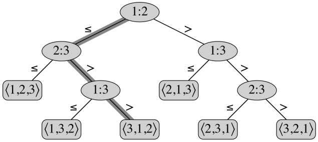


Labels for indre knuder: array-indeks for to input elementer der sammenlignes.

Labels for blade (svar når algoritmen stopper): hvilken opstilling står input i.

Worst-case køretid: længste rod-blad sti = træets højde.

Sammenligningsbaseret sortering



For en fast samling af n elementer er der $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot n$ forskellige input (rækkefølger af elementer).

Hvis algoritmen (træet) skal kunne sortere alle disse, skal der være mindst $n!$ blade - ellers vil der være to forskellig input som leder til samme svar, og for det ene input må svaret være forkert.

Et træ af højde h har højst 2^h blade.

$$2^h \geq \text{ antal blade } \geq n!$$

$$h \geq \log(n!) = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot n)$$

$$= \log(1) + \log(2) + \log(3) + \cdots + \log(n) \geq \frac{n}{2} \cdot \log(\frac{n}{2}) = \frac{n}{2}(\log(n) - 1)$$

$$h = \Omega(n \log n)$$

Counting sort

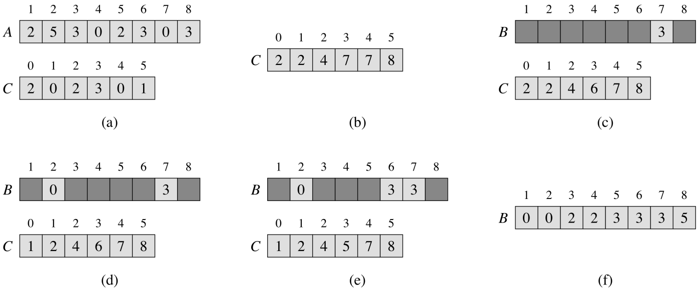
Elementer heltal: elementer kan bruges som array-indekser ($\neq$ at bruge sammenligninger på elementer).

Counting sort: Sorterer n heltal af størrelse mellem 0 og k.

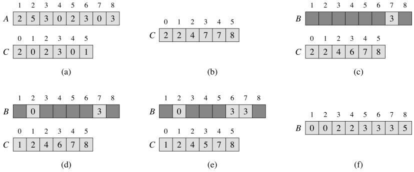
Inputarray: A (længde n)

Outputarray: B (længde n)

Array af tællere for hver mulig elementværdi: C (længde $k+1$)



Counting sort



COUNTING-SORT(A, B, k)
- **for** $i = 0$ **to** k
  - $C[i] = 0$
- **for** $j = 1$ **to** $A.length$
  - $C[A[j]]{+}{+}$
- **for** $i = 1$ **to** k
  - $C[i] = C[i] + C[i-1]$
- **for** $j = A.length$ **downto** 1
  - $B[C[A[j]]] = A[j]$
  - $C[A[j]]{-}{-}$

Tid: $O(n+k)$

Bemærk: stabil (da sidste løkke løber baglæns gennem både A og B), dvs at elementer med ens værdier beholder deres indbyrdes plads.

Radix sort

Radix sort: Sorterer n heltal alle med d cifre i base (radix) k.

(dvs. cifrene er heltal i $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$)

RADIX-SORT(A,d)
  for $i = 1$ **to** d
    use a stable sort to sort A on digit i from right

329	720	720	329
457	355	329	355
657	436	436	436
839	457	839	457
436	657	355	657
720	329	457	720
355	839	657	839

Tid: $O(d(n+k))$ hvis der bruges Counting Sort i løkken.

Korrekthed:

Efter i'te iteration er løkken er A sorteret hvis man kun kigger på de i cifre mest til højre.

Radix sort

Eksempel: 32-bits heltal.

Se som 2-cifrede tal i base 2^{16}.

Radixsort sorterer disse i tid $O(2(n + 2^{16}))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^{16} = 65.536$

Eller se som 4-cifrede tal i base 2^8.

Radixsort sorterer disse i tid $O(4(n + 2^8))$

Dette er $O(n)$ hvis $n \geq 2^8 = 256$