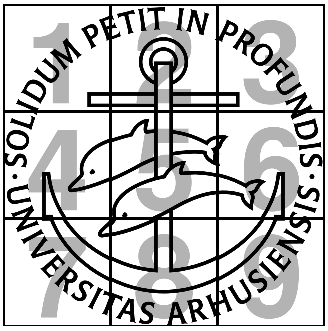
Puslespil ved Ombytninger

Gerth Stølting Brodal

4. januar 2006

Vi betragter i det følgende rektangulære puslespil med n brikker. Vi antager at brikkerne er nummererede fra 1 til n, hvor brikkerne er nummereret efter deres korrekte placering startende i øverste venstre hjørne, jvf. nedenstående eksempel.



For at løse et puslespil må man gentagne gange udvælge to brikker og bytte om på disse to brikkers placeringer. I figur 1 ses et eksempel på et puslespil med 9 brikker der er løst ved 5 ombytninger. Målet er for et givet puslespil at finde en sekvens af ombytninger der indeholder færest mulige ombytninger.

1 En grådig algoritme

Nedenstående *algoritme* løser et puslespil ved i hver ombytning at flytte en ny brik til sin korrekte plads.

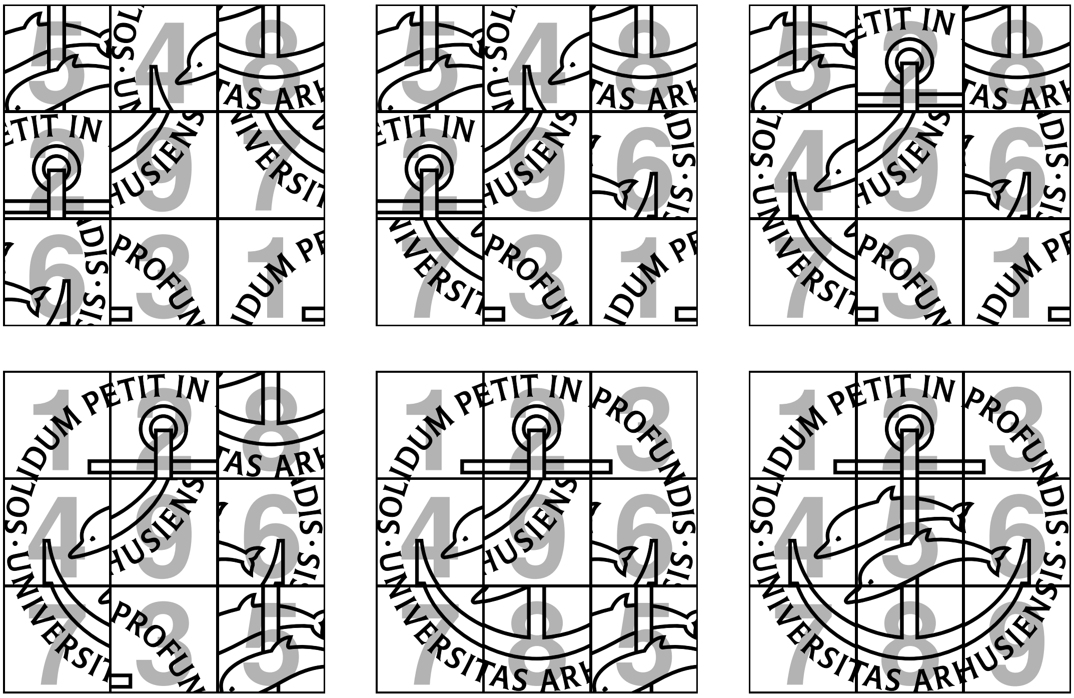
Algoritme Puslespil
while der findes en brik x som ikke er placeret korrekt **do**
    lad y være brikken på x's korrekte plads
    ombyt(x, y)
od

Lemma 1 *Algoritmen bytter aldrig om på brikker der står på en korrekt plads.*

Bevis. Ved ombytningen i algoritmen står x ikke på sin korrekte plads ved valget af x, og y står heller ikke på sin korrekte plads, da den står på x's plads. □

Lemma 2 *Algoritmen udfører højst $n - 1$ ombytninger.*

Bevis. Hver ombytning flytter mindst en brik, x, til sin korrekte plads. Den sidste ombytning flytter både x og y til deres korrekte pladser, dvs. der er højst $n - 1$ ombytninger. □



Figur 1: Ovenstående puslespil er løst ved ombytningerne (6,7), (2,4), (1,5), (3,8), og (5,9).

2 En forfinet analyse

Ikke alle puslespil kræver nødvendigvis mange ombytninger. F.eks. hvis alle knuder i starten står på deres korrekte plads, så kræves der ingen ombytninger. Et lidt mere interessant eksempel er nedenstående hvor ingen brikker er på deres korrekte pladser, men hvor algoritmen kun bruger $n/2$ ombytninger.

2	1	4	3
6	5	8	7
10	9	12	11

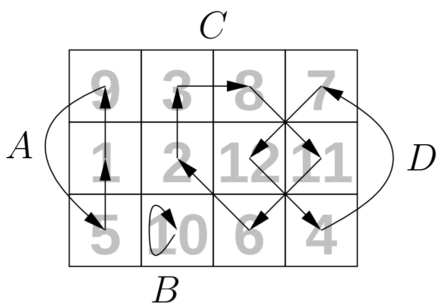
I det følgende vil vi se på hvor mange ombytninger der kræves for et konkret puslespil, og give en bedre analyse af den grådige algoritme.

For et givet puslespil tegn en pil fra et felt med en brik x til det korrekte felt for x, jvf. figur 2. Dette giver anledning til en mængde af cykler (en cykel er en sammenhængende række af pile der starter og slutter samme sted), hvor hvert felt netop indgår i en cykel. Bemærk at et felt med en korrekt brik udgør en cykel for sig selv.

Lemma 3 *Når alle brikker er korrekt placeret er der præcis n cykler.*

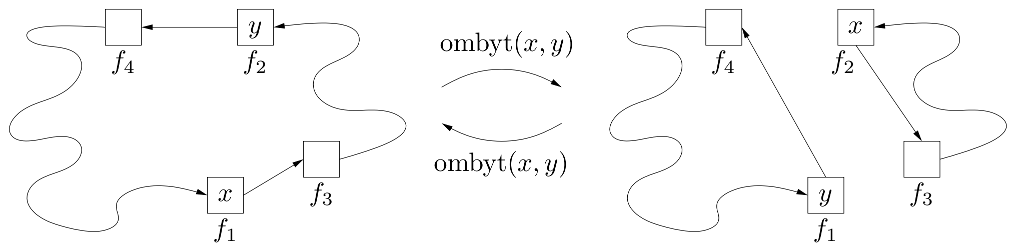
Bevis. Følger umiddelbart af definitionen af cyklerne. □

Lemma 4 *En ombytning af to brikker i samme cykel øger antallet af cykler med én. En ombytning af to brikker fra to forskellige cykler reducerer antallet af cykler med én.*



Figur 2: Et puslespil hvor brikkerne udgør 4 cykler A, B, C, og D.

Bevis. Lad de to brikker der byttes om være x og y, og antag de er placeret på henholdsvis felterne f_1 og f_2, og at deres korrekte placering er på henholdsvis f_3 og f_4 (hvor muligvis $f_3 = f_2$ og/eller $f_4 = f_1$). De to tilfælde er illustreret i nedenstående figur. Ombytningen i samme cykel svarer til at gå fra venstre mod højre, hvor en cykel deles i to cyklere. Ombytningen mellem to forskellige cykler svarer til at gå fra højre mod venstre, hvor to cykler sættes sammen til en cykel.



□

Lemma 5 *Algoritmen kræver præcis $n-k$ ombytninger for at løse et puslespil med n brikker og k cykler i starten.*

Bevis. Da algoritmen altid ombytter to brikker fra samme cykel (y kommer umiddelbart efter x i cyklen), øger hver ombytning antallet af cykler med én (Lemma 4). Da man starter med k cykler og slutter med n cykler (Lemma 3) foretages der præcis $n - k$ ombytninger. □

Sætning 1 *For at løse et puslespil med n brikker og k cykler i starten kræves præcis $n - k$ ombytninger.*

Bevis. At $n - k$ ombytninger er tilstrækkeligt (*en øvre grænse*) følger af Lemma 5. At man ikke kan gøre det med færre ombytninger (*en nedre grænse*) følger af at ingen ombytning kan forøge antallet af cykler med mere end én (Lemma 4), og at man skal starte og slutte med henholdsvis k og n cykler. □

Vi siger at algoritmen er *optimal*, da vi har vist at den opnår det bedst mulige antal ombytninger for alle mulige puslespil.

3 Tilfældige puslespil

Ifølge Sætning 1 har vi at ikke alle puslespil kræver det samme antal ombytninger. Det afgørende er antallet af cykler i permutationen (omplaceringen) af brikkerne. Hvis permutationerne er tilfældige valgt således at alle permutationer er lige sandsynlige, så gælder nedenstående sætning. Det følger heraf at det forventede optimale antal ombytninger for et tilfældigt puslespil er $n - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

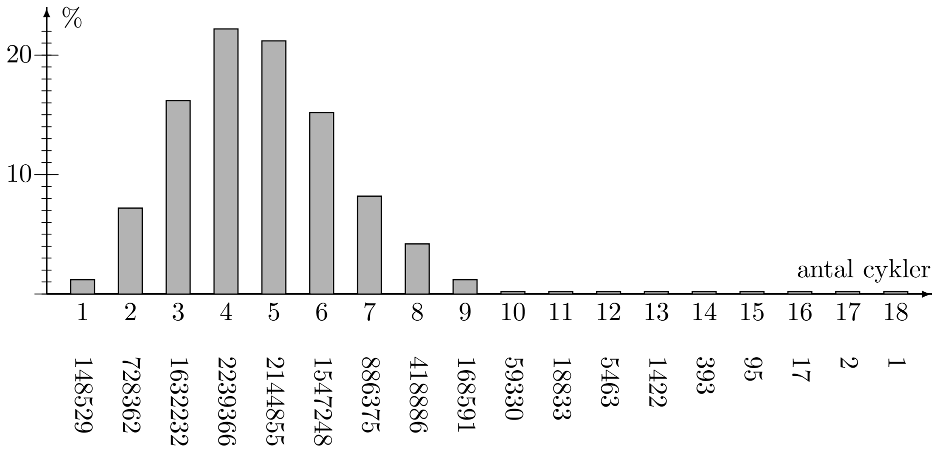
Sætning 2 *Det forventede antal cykler i en tilfældig permutation af* n *brikker er*

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \ .$$

H_n *betegnes det* n*-te harmoniske tal og kan tilnærmelsesvis beskrives ved*

$$H_n \approx \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12}n^{-2} + \frac{1}{120}n^{-4} - \frac{1}{252}n^{-6} + \cdots \ ,$$

hvor $\gamma = 0.577215664901\ldots$ *er Euler-Mascheroni konstanten.*



Figur 3: Fordelingen af antallet af cykler i 10.000.000 tilfældige puslespil med 64 brikker. Det forventede antal cykler er $H_{64} \approx 4.7439$.

Opgaver

1. Vis at hvis alle brikker ikke står på deres korrekte pladser i starten, så kræves mindst $n/2$ ombytninger for at løse puslespillet.
2. Angiv et puslespil med 4 brikker og en optimal følge af ombytninger for det givne puslespil (en følge af ombytninger der indeholder det mindst mulig antal ombytninger), men hvor ikke alle ombytninger flytter mindst én brik til den korrekte plads.
3. For et givet n, angiv et puslespil med n brikker og en optimal følge af ombytninger, der opnår det maksimale antal ombytninger der ikke bringer mindst én brik til den korrekte plads. Argumenter for at følgen af ombytninger er bedst mulig.