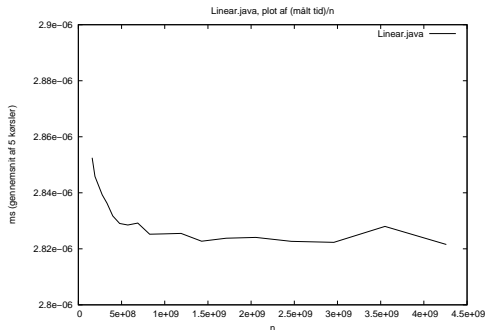


Asymptotisk analyse af algoritmers køretider

Analyse af køretid (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
public class Linear {  
    public static void main(String[] args) {  
  
        long time = System.currentTimeMillis();  
        long n = Long.parseLong(args[0]);  
        long total = 0;  
        for(long i=1; i<=n; i++){  
            total = total + 1;  
        }  
        System.out.println(total);  
        System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);  
    }  
}
```

$$T(n) = c_1 \cdot n + c_0$$



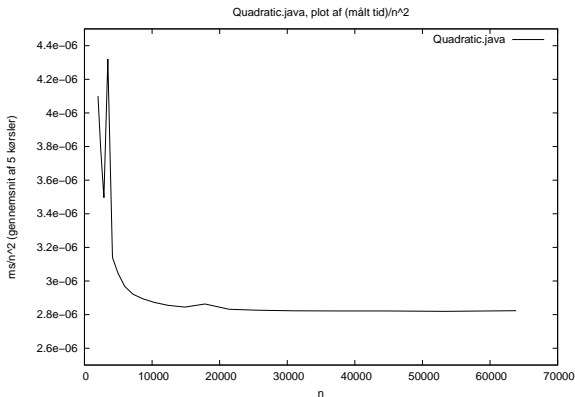
x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)/ n

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){  
  for(long j=1; j<=n; j++){  
    total = total + 1;  
  }  
}
```

$$\begin{aligned}T(n) &= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 \\ &= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0\end{aligned}$$



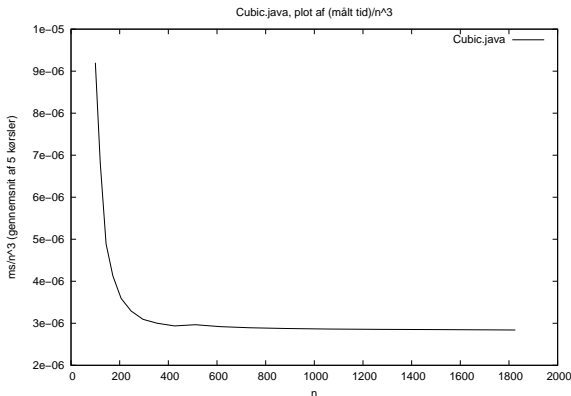
x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)/ n^2

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

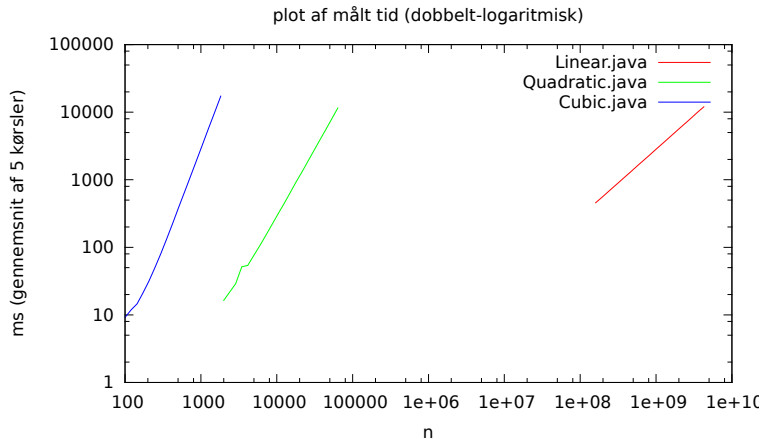
$$T(n)$$
$$= ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0$$
$$= c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0$$



x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)/ n^3

Linear vs. kvadratisk vs. kubisk



Multiplikative konstanter

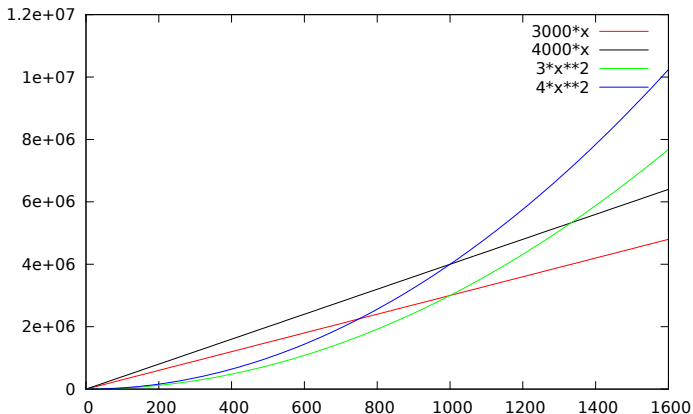
Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$$f(n) = 3000n$$

$$g(n) = 4000n$$

$$h(n) = 3n^2$$

$$k(n) = 4n^2$$



$$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n$$

$$A \cdot n < B \cdot n^2 \Leftrightarrow A/B < n$$

Asymptotisk notation

Vi ønsker at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Vi ønsker for **voksehastighed for funktioner** sammenligninger svarende til de fem klassiske ordens-relationer:

$$\leq \quad \geq \quad = \quad < \quad >$$

De vil, af historiske årsager, blive kaldt for:

$$O \quad \Omega \quad \Theta \quad o \quad \omega$$

Hvilket udtales således:

“Store O”, “Omega”, “Theta”, “lille o”, “lille omega”

Følgende definitioner har vist sig at fungere godt:

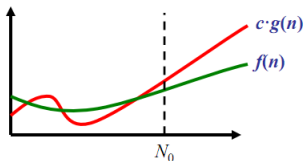
Store O

Definition: $f(n) = O(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



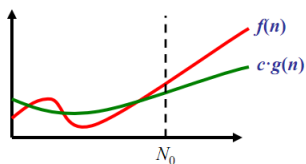
Mening: $f \leq g$ i voksehastighed

Store Omega

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og
findes $c > 0$ og N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

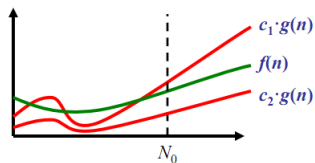


Mening: $f \geq g$ i voksehastighed

Theta

Definition: $f(n) = \theta(g(n))$

hvis $f(n) = O(g(n))$ og $f(n) = \Omega(g(n))$



Mening: $f = g$ i voksehastighed

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, findes N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Mening: $f < g$ i voksehastighed

Lille omega

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, findes N_0 så for alle $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

Mening: $f > g$ i voksehastighed

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \quad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n)) \quad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = O(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Omega(f(n)) \quad (\text{jvf. } x \leq y \Rightarrow y \geq x)$$

$$f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = \omega(f(n)) \quad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow y > x)$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ og } f(n) = \Omega(g(n)) \Rightarrow g(n) = \Theta(g(n))$$

$$(\text{jvf. } x \leq y \text{ og } x \geq y \Rightarrow x = y)$$

Asymptotisk analyse

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende sætninger:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = k > 0 \Rightarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow f(n) = o(g(n))$$

Eksempler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} = \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20n^2 + 17n + 312}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{20/n + 17/n^2 + 312/n^3}{1} = \frac{0 + 0 + 0}{1} = 0$$

Asymptotisk analyse

Derudover er det godt at vide følgende fact fra matematik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \text{ for alle } a > 0 \text{ og } b > 1$$

Dvs. enhver polynomium er $o()$ af enhver exponentialfunktion

Eksempelvis giver dette at:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0 \Rightarrow n^{100} = o(2^n)$$

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^a}{b^N} = 0 \text{ for alle } a > 0 \text{ og } b > 1$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N^a}{b^N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^a}{b^N}$$

og derfor fås følgende variant af reglen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log_c n)^a}{n^d} = 0 \text{ for alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1$$

Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af enhver polynomial.

Eksempelvis giver dette at:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^3}{n^{0.5}} = 0 \Rightarrow (\log n)^3 = o(n^{0.5})$$

Større eksempel

Disse regler forklarer at følgende funktioner er sat i stigende voksehastighed (den ene er $o()$ af den næste):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n/\log n, \quad n, \quad n \log n, \\ n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

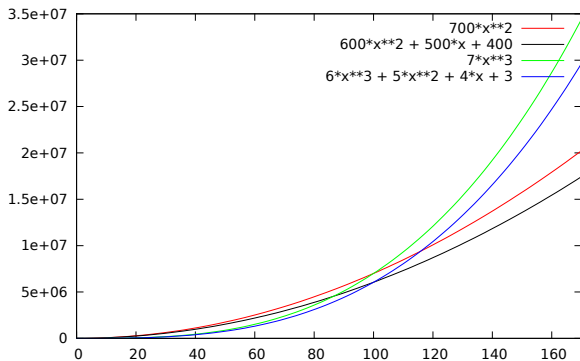
Dominerende led

Bemærk at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2$$

$$g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \quad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$



Figuren passer med beregninger:

Dominerende led

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + 5/n + 4/n^2}{7} = \frac{6 + 0 + 0}{7} = 6/7$$

$$\text{Dvs. } 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{600n^2 + 500n + 400}{700n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{600 + 500/n + 400/n^2}{700} = \frac{600 + 0 + 0}{700} = 6/7$$

$$\text{Dvs. } 600n^2 + 500n + 400 = \Theta(700n^2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{600n^2 + 500n + 400}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{600/n + 500/n^2 + 400/n^3}{6 + 5/n^2 + 4/n^3 + 3/n^3} = \frac{0 + 0 + 0}{6 + 0 + 0 + 0} = 0$$

$$\text{Dvs. } 600n^2 + 500n + 400 = o(6n^3 + 5n^2 + 4n + 3)$$