

Sammenhængskomponenter i grafer

Ækvivalensrelationer

En relation “ \sim ” på en mængde S kaldes som bekendt en **ækvivalensrelation** hvis der for alle $x, y, z \in S$ gælder:

- ▶ $x \sim x$.
- ▶ $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- ▶ $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Ækvivalensrelationer

En relation “ \sim ” på en mængde S kaldes som bekendt en **ækvivalensrelation** hvis der for alle $x, y, z \in S$ gælder:

- ▶ $x \sim x$.
- ▶ $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- ▶ $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

En ækvivalensrelation deler S i disjunkte delmængder (hver bestående af elementer som er i relation til hinanden, men ikke til andre elementer), og kaldes derfor også en partition.

Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

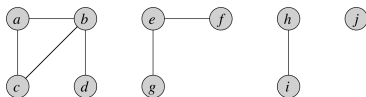
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens **sammenhængskomponenter** (CC'er).

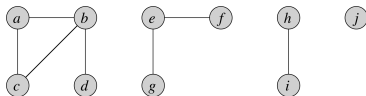
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens **sammenhængskomponenter** (CC'er).

Finde dem?

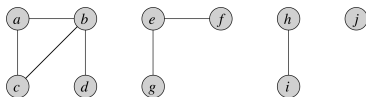
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens **sammenhængskomponenter** (CC'er).

Finde dem? Via DFS eller BFS (med ydre "driver", som i DFS).

Knuderne i hvert genereret træ er en CC, da alle knuder, som kan nås fra en startknode s , vil blive nået, og ingen andre knuder kan nås (jvf. punkt 1 og 2 i sætning om BFS).

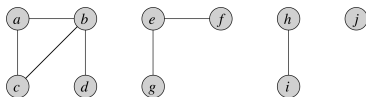
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens **sammenhængskomponenter** (CC'er).

Finde dem? Via DFS eller BFS (med ydre "driver", som i DFS).

Knuderne i hvert genereret træ er en CC, da alle knuder, som kan nås fra en startknode s , vil blive nået, og ingen andre knuder kan nås (jvf. punkt 1 og 2 i sætning om BFS).

Tid?

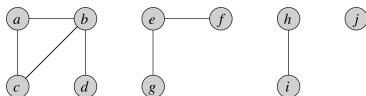
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Uorienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (uorienteret) sti mellem u og v

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens **sammenhængskomponenter** (CC'er).

Finde dem? Via DFS eller BFS (med ydre "driver", som i DFS).

Knuderne i hvert genereret træ er en CC, da alle knuder, som kan nås fra en startknode s , vil blive nået, og ingen andre knuder kan nås (jvf. punkt 1 og 2 i sætning om BFS).

Tid? $O(n + m)$.

Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Orienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \iff$ der er en (orienteret) sti fra u til v
og
der er en (orienteret) sti fra v til u

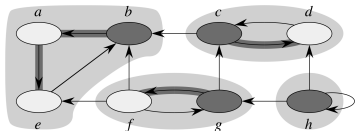
Ækvivalensrelationer på en grafs knuder

Orienterede grafer:

For $v, u \in V$:

$v \sim u \Leftrightarrow$ der er en (orienteret) sti fra u til v
og
der er en (orienteret) sti fra v til u

Giver en partition af grafens knuder V :



De kaldes grafens stærke sammenhængskomponenter (SCC'er).

Finde dem?

Finde stærke sammenhængskomponenter

Algoritme:

SCC(G)

call DFS(G) to compute finishing times $u.f$ for all u

compute G^T

call DFS(G^T), but in the main loop, consider vertices in order of decreasing $u.f$
(as computed in first DFS)

output the vertices in each tree of the depth-first forest formed in second DFS
as a separate SCC

Her er G^T grafen G med alle kanter vendt.

Finde stærke sammenhængskomponenter

Algoritme:

SCC(G)

call DFS(G) to compute finishing times $u.f$ for all u

compute G^T

call DFS(G^T), but in the main loop, consider vertices in order of decreasing $u.f$
(as computed in first DFS)

output the vertices in each tree of the depth-first forest formed in second DFS
as a separate SCC

Her er G^T grafen G med alle kanter vendt.

Tid?

Finde stærke sammenhængskomponenter

Algoritme:

SCC(G)

call DFS(G) to compute finishing times $u.f$ for all u

compute G^T

call DFS(G^T), but in the main loop, consider vertices in order of decreasing $u.f$
(as computed in first DFS)

output the vertices in each tree of the depth-first forest formed in second DFS
as a separate SCC

Her er G^T grafen G med alle kanter vendt.

Tid? $O(n + m)$.

Finde stærke sammenhængskomponenter

Algoritme:

SCC(G)

call DFS(G) to compute finishing times $u.f$ for all u

compute G^T

call DFS(G^T), but in the main loop, consider vertices in order of decreasing $u.f$
(as computed in first DFS)

output the vertices in each tree of the depth-first forest formed in second DFS
as a separate SCC

Her er G^T grafen G med alle kanter vendt.

Tid? $O(n + m)$.

Korrekthed?

Finde stærke sammenhængskomponenter

Algoritme:

SCC(G)

call DFS(G) to compute finishing times $u.f$ for all u

compute G^T

call DFS(G^T), but in the main loop, consider vertices in order of decreasing $u.f$
(as computed in first DFS)

output the vertices in each tree of the depth-first forest formed in second DFS
as a separate SCC

Her er G^T grafen G med alle kanter vendt.

Tid? $O(n + m)$.

Korrekthed? De næste sider...

Korrekthed af SCC algoritme

Sætning:

Algoritmen SCC ovenfor er korrekt, dvs. træerne returneret fra det andet kald til DFS repræsenterer præcis G 's SCC'er.

Korrekthed af SCC algoritme

Sætning:

Algoritmen SCC ovenfor er korrekt, dvs. træerne returneret fra det andet kald til DFS repræsenterer præcis G 's SCC'er.

Bevis:

Korrekthed af SCC algoritme

Sætning:

Algoritmen SCC ovenfor er korrekt, dvs. træerne returneret fra det andet kald til DFS repræsenterer præcis G 's SCC'er.

Bevis:

Bemærk først at:

Der er en sti $u \rightsquigarrow v$ i $G \iff$ Der er en sti $v \rightsquigarrow u$ i G^T

Korrekthed af SCC algoritme

Sætning:

Algoritmen SCC ovenfor er korrekt, dvs. træerne returneret fra det andet kald til DFS repræsenterer præcis G 's SCC'er.

Bevis:

Bemærk først at:

Der er en sti $u \rightsquigarrow v$ i $G \iff$ Der er en sti $v \rightsquigarrow u$ i G^T

Heraf følger:

u og v i samme SCC i $G \iff u$ og v i samme SCC i G^T

Korrekthed af SCC algoritme

Sætning:

Algoritmen SCC ovenfor er korrekt, dvs. træerne returneret fra det andet kald til DFS repræsenterer præcis G 's SCC'er.

Bevis:

Bemærk først at:

Der er en sti $u \rightsquigarrow v$ i $G \iff$ Der er en sti $v \rightsquigarrow u$ i G^T

Heraf følger:

u og v i samme SCC i $G \iff u$ og v i samme SCC i G^T

Så G og G^T har de samme SCC'er.

Korrekthed af SCC algoritme

Hvid-sti lemma:

Hvis findes en sti af hvide knuder fra u til w når u kommer på stakken (dvs. til tid $u.d$), da kommer w på stakken inden u kommer af.

Korrektthed af SCC algoritme

Hvid-sti lemma:

Hvis findes en sti af hvide knuder fra u til w når u kommer på stakken (dvs. til tid $u.d$), da kommer w på stakken inden u kommer af.

Bevis (lemma):

Antag at der findes knuder på stien som ikke kommer på stakken før u kommer af, og lad y være den første (set fra u). Dvs. y 's forgænger x kom på stakken inden u kom af. Men så kan u ikke komme af inden x gør, og x kan ikke komme af før w har været på stakken (da w er nabo til x vil w blive opdaget/sat på stakken af x , hvis det ikke er sket tidligere). □

Da w kommer på stakken efter at u kommer på stakken fås:

Korollar:

I situationen ovenfor haves $u.d < w.d < w.f < u.f$.

Korrekthed af SCC algoritme

For en knudemængde $C \subseteq V$ defineres $f(C) = \max_{v \in C} v.f$ (hvor f angiver tiden fra første DFS i SCC-algoritmen).

Lemma:

Hvis C, C' er to forskellige SCC'er i G , og (x, y) er en kant i G med $x \in C$ og $y \in C'$, da gælder $f(C) > f(C')$.

Korrekthed af SCC algoritme

For en knudemængde $C \subseteq V$ defineres $f(C) = \max_{v \in C} v.f$ (hvor f angiver tiden fra første DFS i SCC-algoritmen).

Lemma:

Hvis C, C' er to forskellige SCC'er i G , og (x, y) er en kant i G med $x \in C$ og $y \in C'$, da gælder $f(C) > f(C')$.

Da G^T er G med alle kanter vendt, og da SCC'erne er de samme i G^T og G , haves:

Korollar:

Hvis C, C' er to forskellige SCC'er i G^T , og (x, y) er en kant i G^T med $x \in C$ og $y \in C'$, da gælder $f(C) < f(C')$.

Korrekthed af SCC algoritme

Bevis (lemma):

Lad u være den første knude i $C \cup C'$ som opdages.

Korrektthed af SCC algoritme

Bevis (lemma):

Lad u være den første knude i $C \cup C'$ som opdages.

Case 1: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C \cup C'$, så udsagnet følger af korollar til hvid-sti lemma.

Korrektthed af SCC algoritme

Bevis (lemma):

Lad u være den første knude i $C \cup C'$ som opdages.

Case 1: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C \cup C'$, så udsagnet følger af korollar til hvid-sti lemma.

Case 2: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C'$, så af samme korollar haves $f(C') = u.f$.

Korrektthed af SCC algoritme

Bevis (lemma):

Lad u være den første knude i $C \cup C'$ som opdages.

Case 1: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C \cup C'$, så udsagnet følger af korollar til hvid-sti lemma.

Case 2: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C'$, så af samme korollar haves $f(C') = u.f$.

Hvis der fandtes en knude $v \in C$ med $v.d < u.f$, ville der være et tidspunkt hvor v og u var på stakken samtidig (da $u.d < v.d$, eftersom u var den først opdagede i $C \cup C'$). Da det er en invariant under DFS at der i grafen findes en sti mellem knuderne på stakken (fra tidligere til senere push'ede knuder), ville dette betyde en sti fra $u \in C'$ til $v \in C$. Sammen med kanten (x, y) ville dette medføre at alle knuder i $C \cup C'$ var i samme SCC, i modstrid med at C og C' er to forskellige SCC'er.

Korrekthed af SCC algoritme

Bevis (lemma):

Lad u være den første knude i $C \cup C'$ som opdages.

Case 1: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C \cup C'$, så udsagnet følger af korollar til hvid-sti lemma.

Case 2: $u \in C$. Her er der en sti fra u til w for alle $w \in C'$, så af samme korollar haves $f(C') = u.f$.

Hvis der fandtes en knude $v \in C$ med $v.d < u.f$, ville der være et tidspunkt hvor v og u var på stakken samtidig (da $u.d < v.d$, eftersom u var den først opdagede i $C \cup C'$). Da det er en invariant under DFS at der i grafen findes en sti mellem knuderne på stakken (fra tidligere til senere push'ede knuder), ville dette betyde en sti fra $u \in C'$ til $v \in C$. Sammen med kanten (x, y) ville dette medføre at alle knuder i $C \cup C'$ var i samme SCC, i modstrid med at C og C' er to forskellige SCC'er.

Derfor haves $v.d > u.f$ for alle $v \in C$, så $f(C) > u.f = f(C')$. □

Korrekthed af SCC algoritme

Vi viser nu sætningen om korrekthed af SCC-algoritmen ved at vise at for alle k gælder:

Knuderne i de k første træer genereret under den anden DFS i SCC-algoritmen udgør hver især en SCC i G^T .

Da SCC'erne i G og G^T er de samme, og da alle knuder i grafen er i eet af træerne, viser dette korrektheden.

Korrekthed af SCC algoritme

Vi viser nu sætningen om korrekthed af SCC-algoritmen ved at vise at for alle k gælder:

Knuderne i de k første træer genereret under den anden DFS i SCC-algoritmen udgør hver især en SCC i G^T .

Da SCC'erne i G og G^T er de samme, og da alle knuder i grafen er i eet af træerne, viser dette korrektheden.

Vi viser ovenstående udsagn via induktion på k .

Korrekthed af SCC algoritme

Vi viser nu sætningen om korrekthed af SCC-algoritmen ved at vise at for alle k gælder:

Knuderne i de k første træer genereret under den anden DFS i SCC-algoritmen udgør hver især en SCC i G^T .

Da SCC'erne i G og G^T er de samme, og da alle knuder i grafen er i eet af træerne, viser dette korrektheden.

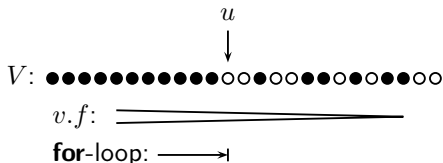
Vi viser ovenstående udsagn via induktion på k .

Skridt: Antag sandt for k , vis sandt for $k + 1$.

Det $(k + 1)$ 'te træ genereres ved det $(k + 1)$ 'te kald til DFS-VISIT i **for**-løkken i den ydre "driver" i DFS. Lad u være knude, der kaldes på.

Hvis vi stiller knuderne op i **for**-løkkens rækkefølge (efter aftagende *v.f*-værdi), ser situationen sådan ud på tidspunktet for dette kald:

Korrektthed af SCC algoritme



Sorte knuder er de indtil nu opdagede under DFS, hvide er de uopdagede.

Lad C være SCC'en indeholdende u , og lad T være træet genereret af kaldet på u . Af induktionsantagelsen udgør de sorte knuder præcis k af grafens SCC'er. Derfor må alle andre SCC'er ligge inden i de hvide knuder, og C er en af disse (da u er hvid).

Eftersom der ved starten af kaldet er en hvid sti fra u til alle $w \in C$, giver korollar til hvid-sti lemma at $C \subseteq T$.

Korrektthed af SCC algoritme

Lad C' være en vilkårlig hvid SCC forskellig fra C . Pga. **for**-løkkens rækkefølge ses $u.f = f(C) > f(C')$, så af korollar til lemma ovenfor fås at ingen kant i G^T kan gå fra C til C' . Da DFS-VISIT ikke besøger de sorte knuder, kan den derfor ikke forlade C . Heraf ses $T \subseteq C$.

Vi har i alt vist $T = C$, hvilket viser udsagnet for $k + 1$.

Korrektthed af SCC algoritme

Lad C' være en vilkårlig hvid SCC forskellig fra C . Pga. **for**-løkkens rækkefølge ses $u.f = f(C) > f(C')$, så af korollar til lemma ovenfor fås at ingen kant i G^T kan gå fra C til C' . Da DFS-VISIT ikke besøger de sorte knuder, kan den derfor ikke forlade C . Heraf ses $T \subseteq C$.

Vi har i alt vist $T = C$, hvilket viser udsagnet for $k + 1$.

Basis: Samme argument, blot lidt simplere (der er ingen sorte knuder, og u er første knude i rækkefølgen), viser udsagnet for $k = 1$. \square