

Sortering

Sortering

Input: n tal

Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, telefonbøger, adresselister i telefoner, ...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering af information er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

Sortering

Input: n tal

Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9

Kommentarer:

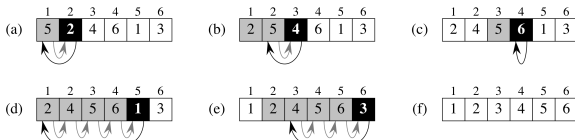
- ▶ Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- ▶ Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som rene tal.
- ▶ Vi vil antage at input ligger i et array. Mange sorteringsalgoritmer vil også kunne implementeres når input er en lænket liste.

Insertionsort

Bruges af mange når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i et array:



Argument for korrekthed: Del af array til venstre for sorte felt er altid sorteret. Denne del udvides med een hele tiden (\Rightarrow algoritmen stopper, med alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

INSERTION-SORT(A, n)

for $j = 2$ **to** n

$key = A[j]$

 // Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1..j-1]$.

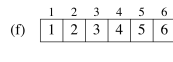
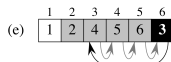
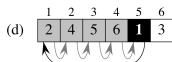
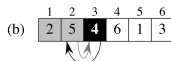
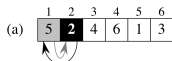
$i = j - 1$

while $i > 0$ and $A[i] > key$

$A[i + 1] = A[i]$

$i = i - 1$

$A[i + 1] = key$



Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	<i>cost</i>	<i>times</i>
for $j = 2$ to n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n - 1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \dots j - 1]$.	0	$n - 1$
$i = j - 1$	c_4	$n - 1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^n t_j$
$A[i + 1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
$i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^n (t_j - 1)$
$A[i + 1] = key$	c_8	$n - 1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres (dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører, hvilket er hvor mange elementer det j 'te element skal forbi under indsættelsen).

Best case: $t_j = 1$ for alle j . Samlet tid $O(n)$.

Worst case: $t_j = j$ for alle j . Samlet tid $O(n^2)$. (Da $\sum_{j=1}^n j = \frac{(n+1)n}{2}$).

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

S = input

S' = tom liste

Repeat:

 find mindste element x i S

 flyt x fra S til enden af S'

Klart korrekt.

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i S . Simpel metode er lineær søgning \Rightarrow tid $O(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1) = O(n^2)$.

Merge

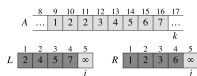
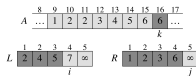
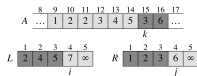
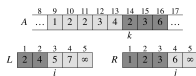
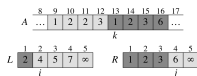
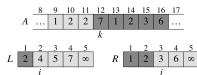
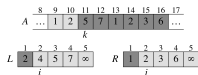
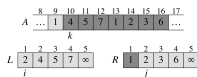
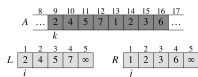
Input: To sorterede rækker 2,4,5,7 1,2,3,6

Output: De samme elementer i een sorteret række 1,2,2,3,4,5,6,7

Vi kan naturligtvis sortere. Men hurtigere at flette (merge):

Repeat:

Flyt det mindste af de to forreste elementer



Tid: $O(n)$, hvor n = antal elementer i alt.

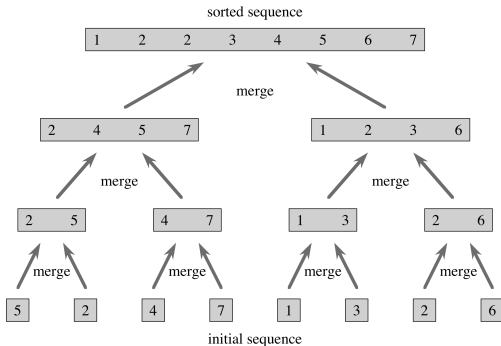
Merge

Som pseudo-kode, med to rækker $A[p \dots q]$ and $A[q + 1 \dots r]$:

```
MERGE( $A, p, q, r$ )  
   $n_1 = q - p + 1$   
   $n_2 = r - q$   
  let  $L[1 \dots n_1 + 1]$  and  $R[1 \dots n_2 + 1]$  be new arrays  
  for  $i = 1$  to  $n_1$   
     $L[i] = A[p + i - 1]$   
  for  $j = 1$  to  $n_2$   
     $R[j] = A[q + j]$   
   $L[n_1 + 1] = \infty$   
   $R[n_2 + 1] = \infty$   
   $i = 1$   
   $j = 1$   
  for  $k = p$  to  $r$   
    if  $L[i] \leq R[j]$   
       $A[k] = L[i]$   
       $i = i + 1$   
    else  $A[k] = R[j]$   
       $j = j + 1$ 
```

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid: $\log_2 n$ lag, som hver koster $O(n)$, dvs. $O(n \log_2 n)$ i alt.

Mergesort

Som pseudo-kode, formuleret rekursivt:

MERGE-SORT(A, p, r)

if $p < r$

$q = \lfloor (p + r)/2 \rfloor$

MERGE-SORT(A, p, q)

MERGE-SORT($A, q + 1, r$)

MERGE(A, p, q, r)

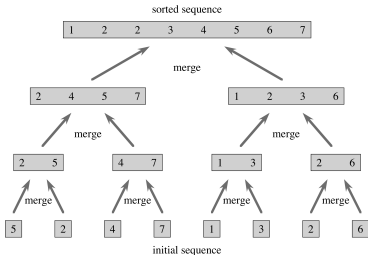
// check for base case

// divide

// conquer

// conquer

// combine



Quicksort

Mergesort:

- ▶ Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- ▶ Sorter hver del for sig (rekursion)
- ▶ Bland de to sorterede dele til een sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$

Quicksort:

- ▶ Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- ▶ Sorter hver del for sig (rekursion)
- ▶ Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$

[Hoare, 1960]

Quicksort

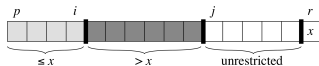
Som pseudo-kode:

```
QUICKSORT( $A, p, r$ )  
  if  $p < r$   
     $q = \text{PARTITION}(A, p, r)$   
    QUICKSORT( $A, p, q - 1$ )  
    QUICKSORT( $A, q + 1, r$ )
```

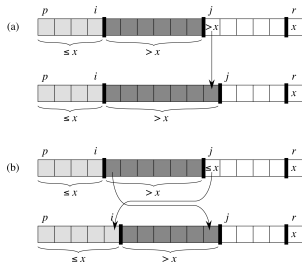
Partition

Hvordan lave partition i to dele $X \leq Y$?

Vælg element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del).
Opbyg de to dele $X \leq Y$ under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

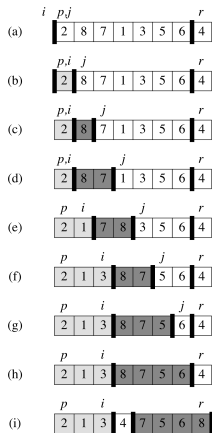


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



Partition

Et eksempel på gennemløb:

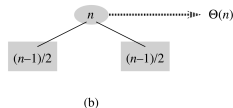
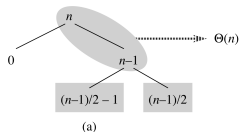


Tid: $O(n)$.

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer:



- ▶ Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (samme analyse som for Mergesort).
- ▶ Hvis alle partitions er helt ubalancerede:
 $O(n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- ▶ I praksis meget ofte tæt på best case.
- ▶ Dog er sorteret input worst case for ovenstående partition (brug ikke den i praksis).
- ▶ Mere robuste partition: vælg opdelingselement x som midterelementet, medianen af flere elementer, et tilfældigt element, eller medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- ▶ Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- ▶ Kode effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. Java og C++/STL).

Heapsort

En **Heap** er:

- ▶ et binært træ
- ▶ med heap-orden
- ▶ og heap-facon
- ▶ udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførelse. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

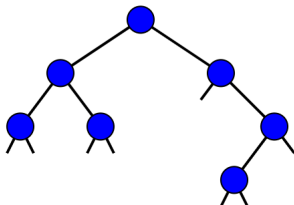
Binært træ

Et binært træ er enten

- ▶ det **tomme træ**

eller

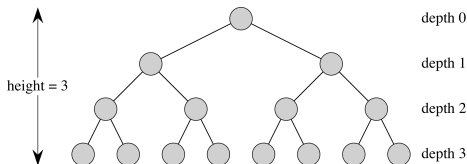
- ▶ en **knude** v (evt. med indhold af data) samt **to undertræer** (et højre og et venstre).



Knuden v kaldes også **rod** for træet. Roden af et (ikke-tomt) undertræ af v kaldes for et **barn** af v , og v kaldes dennes **forælder**. Hvis begge v 's undertræer er tomme, kaldes v et **blad**.

Binært træ

- ▶ **Dybde** af knude = antal kanter til rod
- ▶ **Højde af knude** = max antal kanter til blad
- ▶ **Højde af træ** = højde af dets rod
- ▶ **Fuldt** (complete) binært træ = træ med alle blade i samme dybde.



Et fuldt binært træ af højde h har

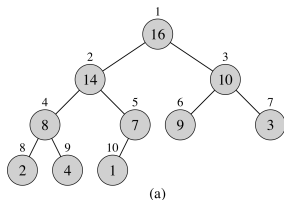
$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^h = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.5 side 1147), heraf 2^h blade.

Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-**heapordnet** hvis det for alle par af knuder v og u , hvor v er forældre til u , gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



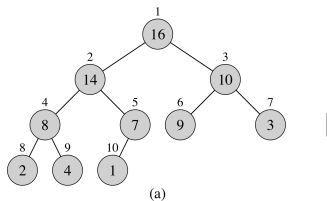
NB: dubletter er tilladt (ikke vist)

Det er min-**heapordnet** hvis der gælder

$$\text{nøgle i } v \leq \text{nøgle i } u$$

Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



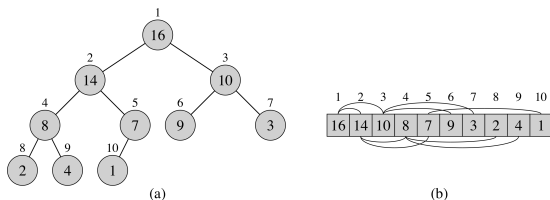
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

- ▶ $n \leq$ antal knuder i fuldt træ af højde $h = 2^{h+1} - 1$
- ▶ $n >$ antal knuder i fuldt træ af højde $h - 1 = 2^h - 1$

$$2^h - 1 < n \Leftrightarrow h < \log_2(n + 1)$$

Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indeksler til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- ▶ Forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- ▶ Børn på plads $2i$ og $2i + 1$

(Se figur ovenfor. Formelt bevis til eksaminatorier.)

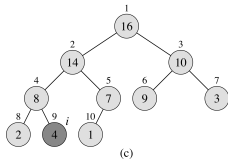
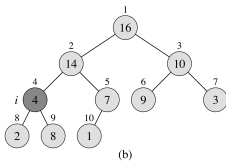
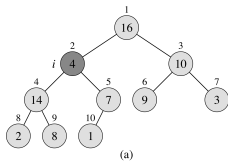
Operationer på en heap

- ▶ **MAX-HEAPIFY:** Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.
- ▶ **BUILD-MAX-HEAP:** Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- ▶ Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- ▶ Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

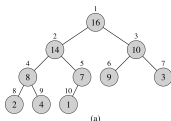


Tid: $O(\text{højde af knude})$.

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger “for langt” i arrayet, dvs. længere end plads n):

```
MAX-HEAPIFY( $A, i, n$ )  
   $l = \text{LEFT}(i)$   
   $r = \text{RIGHT}(i)$   
  if  $l \leq n$  and  $A[l] > A[i]$   
     $largest = l$   
  else  $largest = i$   
  if  $r \leq n$  and  $A[r] > A[largest]$   
     $largest = r$   
  if  $largest \neq i$   
    exchange  $A[i]$  with  $A[largest]$   
    MAX-HEAPIFY( $A, largest, n$ )
```

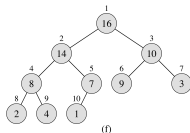
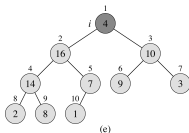
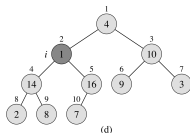
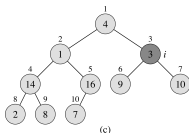
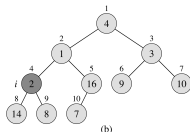
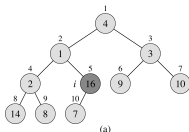


Build-Heap

Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

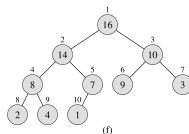
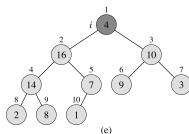
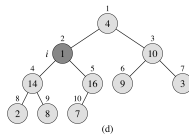
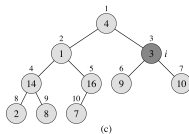
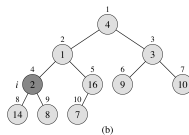
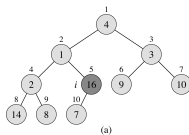
- ▶ Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- ▶ Observation: et træ af størrelse n overholder altid heaporden.

A [4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7]



Build-Heap

A [4 | 1 | 3 | 2 | 16 | 9 | 10 | 14 | 8 | 7]



Tid: $O(n \log_2 n)$ klart. Bedre analyse giver $O(n)$.

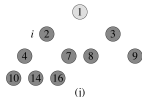
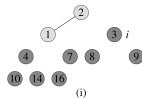
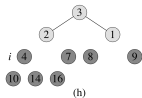
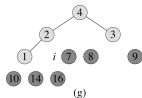
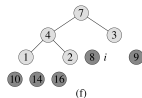
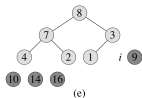
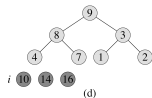
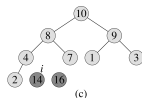
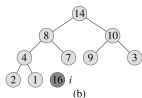
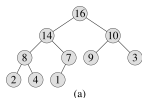
Build-Heap

Som pseudo-kode:

```
BUILD-MAX-HEAP( $A, n$ )  
  for  $i = \lfloor n/2 \rfloor$  downto 1  
    MAX-HEAPIFY( $A, i, n$ )
```

Heapsort

Byg en heap. Gentag: fjern rod (største element i heap), sæt sidste element op som rod, kald MAX-HEAPIFY.



A [1 | 2 | 3 | 4 | 7 | 8 | 9 | 10 | 14 | 16]

(k)

Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT( $A, n$ )
  BUILD-MAX-HEAP( $A, n$ )
  for  $i = n$  downto 2
    exchange  $A[1]$  with  $A[i]$ 
    MAX-HEAPIFY( $A, 1, i - 1$ )
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $n \log n$ sorteringsalgoritmer

	Worstcase	Inplace
QuickSort		✓
MergeSort	✓	
HeapSort	✓	✓

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i standardbiblioteket STL for C++).