Asymptotisk analyse af algoritmers køretider

Analyse af køretid (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

Analyse af køretid (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

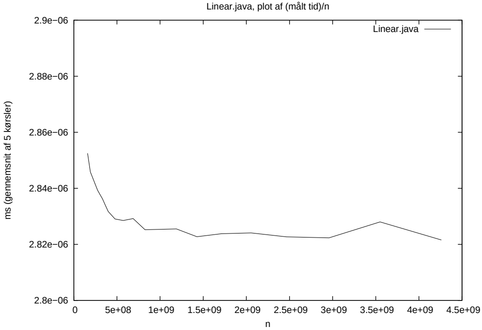
$$\boxed{T(n) = c_1 \cdot n + c_0}$$

Analyse af køretid (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
public class Linear {
  public static void main(String[] args) {

    long time = System.currentTimeMillis();
    long n = Long.parseLong(args[0]);
    long total = 0;
    for(long i=1; i<=n; i++){
      total = total + 1;
    }
    System.out.println(total);
    System.out.println(System.currentTimeMillis() - time);
    }
}
```

$$T(n) = c_1 \cdot n + c_0$$



x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)$/n$

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

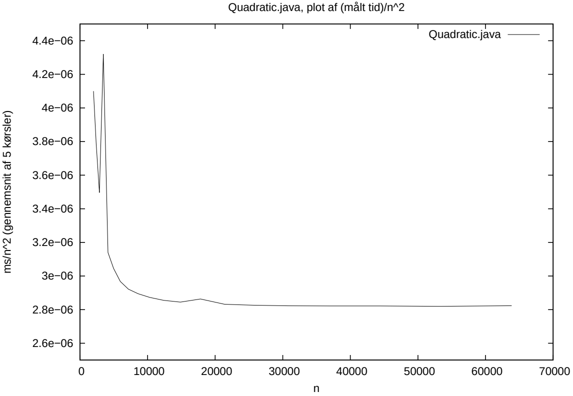
```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

$$
\begin{aligned}
&T(n)\\
&= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0\\
&= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0
\end{aligned}
$$

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    total = total + 1;
  }
}
```

$$T(n)$$
$$= (c_2 \cdot n + c_1) \cdot n + c_0$$
$$= c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0$$



x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)$/n^2$

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

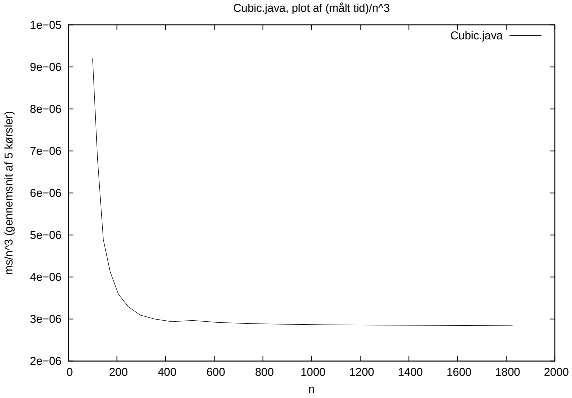
```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

$$T(n)$$
$$= ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0$$
$$= c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0$$

Analyse af tidsforbrug (RAM-modellen vs. virkeligheden)

```
for(long i=1; i<=n; i++){
  for(long j=1; j<=n; j++){
    for(long k=1; k<=n; k++){
      total = total + 1;
    }
  }
}
```

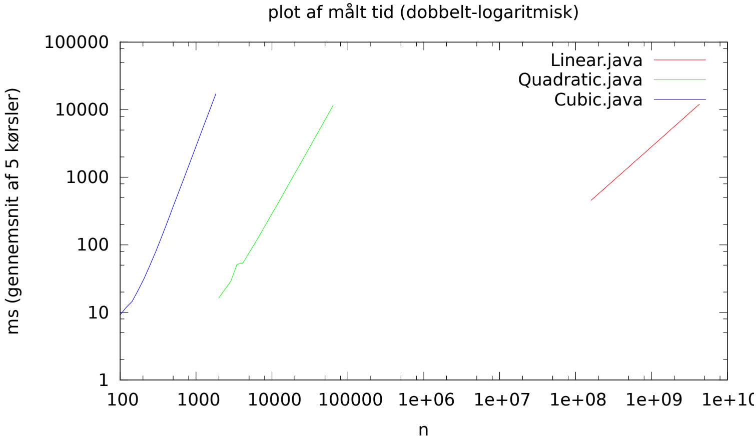
$$T(n) = ((c_3 \cdot n + c_2) \cdot n + c_1) \cdot n + c_0 = c_3 \cdot n^3 + c_2 \cdot n^2 + c_1 \cdot n + c_0$$



x-akse:
inputstørrelse n

y-akse:
(målt tid)/n^3

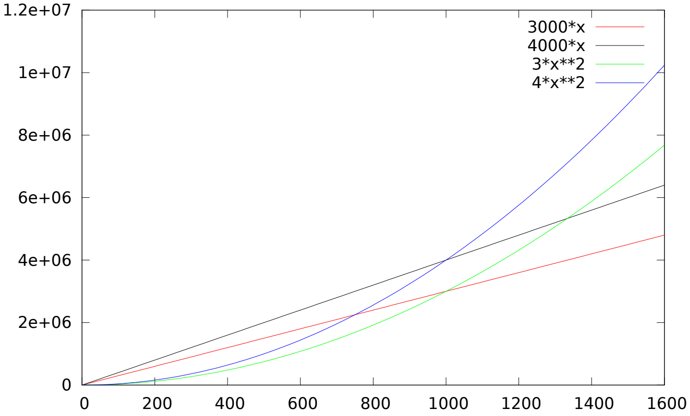
Linear vs. kvadratisk vs. kubisk



Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

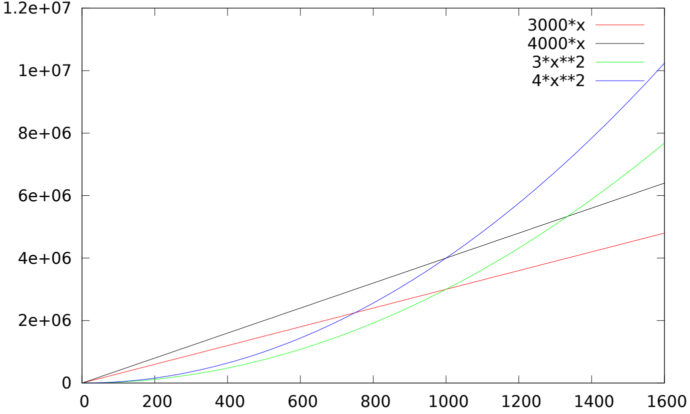
$$f(n) = 3000n \qquad h(n) = 3n^2$$
$$g(n) = 4000n \qquad k(n) = 4n^2$$



Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$$f(n) = 3000n \qquad h(n) = 3n^2$$
$$g(n) = 4000n \qquad k(n) = 4n^2$$

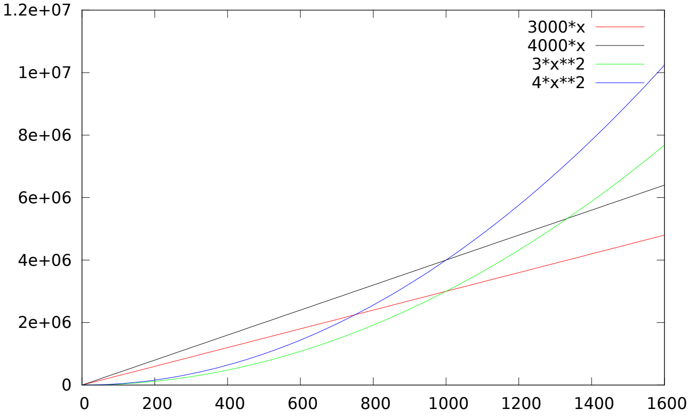


$$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n$$

Multiplikative konstanter

Multiplikative konstanter ligegyldige hvis voksehastighed er forskellig:

$$f(n) = 3000n \qquad h(n) = 3n^2$$
$$g(n) = 4000n \qquad k(n) = 4n^2$$



$$3000n < 4n^2 \Leftrightarrow 3000/4 < n \Leftrightarrow 750 < n \qquad A \cdot n < B \cdot n^2 \Leftrightarrow A/B < n$$

Asymptotisk notation

Vi ønsker at sammenligne funktioners essentielle voksehastighed på en måde så der ses bort fra multiplikative konstanter.

Vi ønsker for voksehastighed for funktioner sammenligninger svarende til de fem klassiske ordens-relationer:

$$\leq \qquad \geq \qquad = \qquad < \qquad >$$

De vil, af historiske årsager, blive kaldt for:

$$O \qquad \Omega \qquad \Theta \qquad o \qquad \omega$$

Hvilket udtales således:

"Store O", "Omega", "Theta", "lille o", "lille omega"

Følgende definitioner har vist sig at fungere godt:

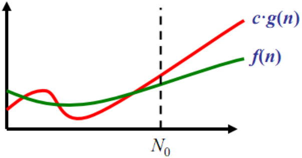
Store O

Definition: $f(n) = O(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



$\boxed{\text{Mening: } f \leq g \text{ i voksehastighed}}$

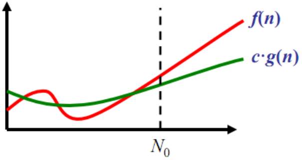
Store Omega

Definition: $f(n) = \Omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

findes $c > 0$ og N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

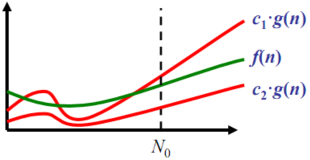


Mening: $f \geq g$ i voksehastighed

Theta

Definition: $f(n) = \theta(g(n))$

hvis $f(n) = O(g(n))$ og $f(n) = \Omega(g(n))$



$\boxed{\text{Mening: } f = g \text{ i voksehastighed}}$

Lille o

Definition: $f(n) = o(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$

Mening: $f < g$ i voksehastighed

Lille omega

Definition: $f(n) = \omega(g(n))$

hvis $f(n)$ og $g(n)$ er funktioner $N \rightarrow R$ og

for alle $c > 0$, *findes* N_0 så *for alle* $n \geq N_0$:

$$f(n) \geq c \cdot g(n)$$

$\boxed{\text{Mening: } f > g \text{ i voksehastighed}}$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Rightarrow y \geq x\ )$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Rightarrow y \geq x\ )$$

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow y > x\ )$$

Asymptotisk notation

Man kan nemt vise at disse definitioner opfører sig som forventet af ordens-relationer. F.eks.:

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow x \leq y)$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \;\Rightarrow\; f(n) = O(g(n)) \qquad (\text{jvf. } x = y \Rightarrow x \leq y\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \Omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x \leq y \Rightarrow y \geq x\ )$$

$$f(n) = o(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \omega(f(n)) \qquad (\text{jvf. } x < y \Rightarrow y > x\ )$$

$$f(n) = O(g(n)) \text{ og } f(n) = \Omega(g(n)) \;\Rightarrow\; g(n) = \Theta(g(n))$$
$$(\text{jvf. } x \leq y \text{ og } x \geq y \Rightarrow x = y\ )$$

Asymptotisk analyse

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n))$$

Asymptotisk analyse

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n))$$

Eksempler:

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} \to \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse

De asymptotiske forhold mellem de fleste funktioner f og g kan afklares ved følgende sætninger:

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to k > 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = \Theta(g(n))$$

$$\text{Hvis } \frac{f(n)}{g(n)} \to 0 \text{ for } n \to \infty \text{ så gælder } f(n) = o(g(n))$$

Eksempler:

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^2} = \frac{20 + 17/n + 312/n^2}{1} \to \frac{20 + 0 + 0}{1} = 20 \text{ for } n \to \infty$$

$$\frac{20n^2 + 17n + 312}{n^3} = \frac{20/n + 17/n^2 + 312/n^3}{1} \to= \frac{0 + 0 + 0}{1} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse

Derudover er det godt at vide følgende fact fra matematik:

For alle $a > 0$ og $b > 1$ gælder

$$\frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse

Derudover er det godt at vide følgende fact fra matematik:

For alle $a > 0$ og $b > 1$ gælder

$$\frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

$\boxed{\text{Dvs. ethvert polynomium er } o() \text{ af enhver exponentialfunktion}}$

Asymptotisk analyse

Derudover er det godt at vide følgende fact fra matematik:

For alle $a > 0$ og $b > 1$ gælder

$$\frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. ethvert polynomium er $o()$ af enhver exponentialfunktion

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{n^{100}}{2^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

hvoraf ses

$$n^{100} = o(2^n)$$

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

For alle $a > 0$ og $b > 1$ gælder $\dfrac{n^a}{b^n} \to 0$ for $n \to \infty$

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d \log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N}$$

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N}$$

og derfor fås følgende variant af reglen:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N}$$

og derfor fås følgende variant af reglen:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af ethvert polynomium.

Asymptotisk analyse

Regel fra sidste slide:

$$\text{For alle } a > 0 \text{ og } b > 1 \text{ gælder } \frac{n^a}{b^n} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

For $c > 1$ og $d > 0$, sæt $N = \log_c(n)$ og $b = c^d$. Så haves

$$\frac{(\log_c n)^a}{n^d} = \frac{N^a}{(c^{\log_c(n)})^d} = \frac{N^a}{c^{d\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^{\log_c(n)}} = \frac{N^a}{(c^d)^N}$$

og derfor fås følgende variant af reglen:

$$\text{For alle } a, d > 0 \text{ og } c > 1 \text{ gælder } \frac{(\log_c n)^a}{n^d} \to 0 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. enhver logaritme (selv opløftet i enhver potens) er $o()$ af ethvert polynomium.

Eksempelvis giver dette at:

$$\frac{(\log n)^3}{n^{0.5}} \to 0 \text{ for } n \to \infty, \text{ hvoraf ses } (\log n)^3 = o(n^{0.5})$$

Større eksempel

Disse regler forklarer at følgende funktioner er sat i stigende voksehastighed (den ene er $o()$ af den næste):

$$1, \quad \log n, \quad \sqrt{n}, \quad n/\log n, \quad n, \quad n\log n,$$

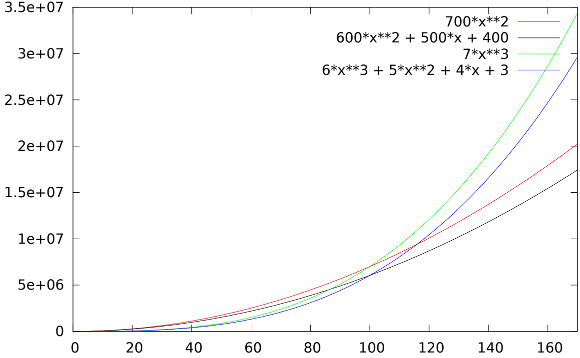
$$n\sqrt{n}, \quad n^2, \quad n^3, \quad n^{10}, \quad 2^n$$

Dominerende led

Bemærk at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2 \qquad g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \qquad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$

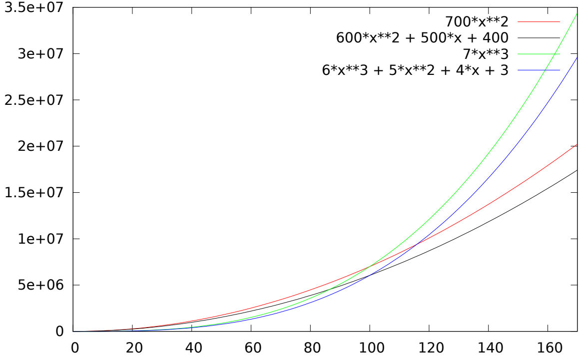


Dominerende led

Bemærk at dominerende led (led med højeste voksehastighed) bestemmer samlet voksehastighed. Eksempel (figur):

$$f(n) = 700n^2 \qquad g(n) = 7n^3$$

$$h(n) = 600n^2 + 500n + 400 \qquad k(n) = 6n^3 + 5n^2 + 4n + 3$$



Figuren passer med beregninger:

Dominerende led

$$\frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \frac{6 + 5/n + 4/n^2}{7} \rightarrow \frac{6 + 0 + 0}{7} = 6/7 \text{ for } n \rightarrow \infty$$

Dvs. $6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$

Dominerende led

$$\frac{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3}{7n^3} = \frac{6 + 5/n + 4/n^2}{7} \to \frac{6 + 0 + 0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $6n^3 + 5n^2 + 4n + 3 = \Theta(7n^3)$

$$\frac{600n^2 + 500n + 400}{700n^2} = \frac{600 + 500/n + 400/n^2}{700} \to \frac{600 + 0 + 0}{700} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

Dvs. $600n^2 + 500n + 400 = \Theta(700n^2)$

Dominerende led

$$\frac{6n^3+5n^2+4n+3}{7n^3} = \frac{6+5/n+4/n^2}{7} \to \frac{6+0+0}{7} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

$$\text{Dvs. } 6n^3+5n^2+4n+3 = \Theta(7n^3)$$

$$\frac{600n^2+500n+400}{700n^2} = \frac{600+500/n+400/n^2}{700} \to \frac{600+0+0}{700} = 6/7 \text{ for } n \to \infty$$

$$\text{Dvs. } 600n^2+500n+400 = \Theta(700n^2)$$

$$\frac{600n^2+500n+400}{6n^3+5n^2+4n+3} = \frac{600/n+500/n^1+400/n^2}{6+5/n^1+4/n^2+3/n^3} \to \frac{0+0+0}{6+0+0+0} = 0 \text{ for } n \to \infty$$

$$\text{Dvs. } 600n^2+500n+400 = o(6n^3+5n^2+4n+3)$$