Grafer og graf-gennemløb

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

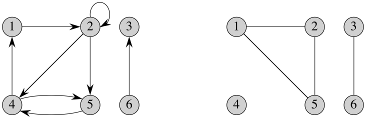
En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Figur:



(a) (b)

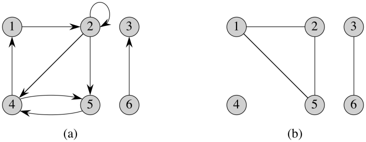
- Terminologi: $n = |V|$, $m = |E|$. Eller V og E genbruges/misbruges til også at betyde $|V|$ og $|E|$.

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Figur:



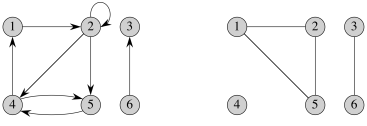
- Terminologi: $n = |V|$, $m = |E|$. Eller V og E genbruges/misbruges til også at betyde $|V|$ og $|E|$.
- Orienteret vs. uorienteret.

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Figur:



(a) (b)

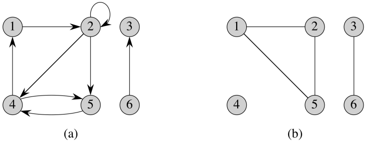
- Terminologi: $n = |V|$, $m = |E|$. Eller V og E genbruges/misbruges til også at betyde $|V|$ og $|E|$.
- Orienteret vs. uorienteret.
- $0 \leq m \leq n(n-1)$ og $0 \leq m \leq n(n-1)/2$

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Figur:



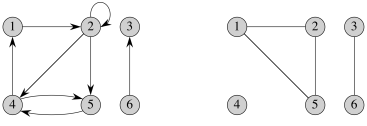
- Terminologi: $n = |V|$, $m = |E|$. Eller V og E genbruges/misbruges til også at betyde $|V|$ og $|E|$.
- Orienteret vs. uorienteret.
- $0 \leq m \leq n(n-1)$ og $0 \leq m \leq n(n-1)/2$
- Evt. loops, multiple kanter.

Grafer

En mængde V af *knuder* (vertices).

En mængde $E \in V \times V$ af *kanter* (edges). Dvs. ordnede par af knuder.

Figur:



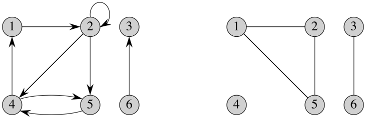
(a) (b)

- Terminologi: $n = |V|$, $m = |E|$. Eller V og E genbruges/misbruges til også at betyde $|V|$ og $|E|$.
- Orienteret vs. uorienteret.
- $0 \leq m \leq n(n-1)$ og $0 \leq m \leq n(n-1)/2$
- Evt. loops, multiple kanter.
- Vægtede grafer.

Grafer

Modeller for mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,...).

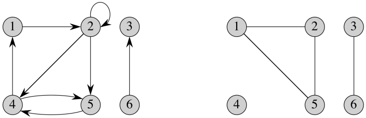


(a) (b)

Grafer

Modeller for mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,. . .).
- Vejnet.

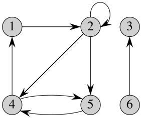


(a) (b)

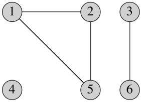
Grafer

Modeller for mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,...).
- Vejnet.
- Bekendtskaber.



(a)

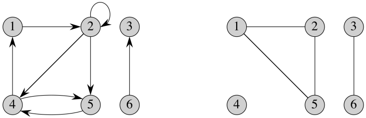


(b)

Grafer

Modeller for mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,. . .).
- Vejnet.
- Bekendtskaber.
- Medforfatterskaber.

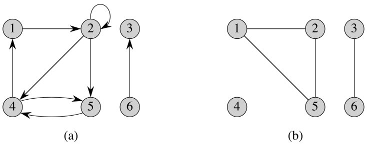


(a) (b)

Grafer

Modeller for mange ting:

- Ledningsnet (telefon, strøm, olie, vand,...).
- Vejnet.
- Bekendtskaber.
- Medforfatterskaber.
- WWW-grafen af sider og links.



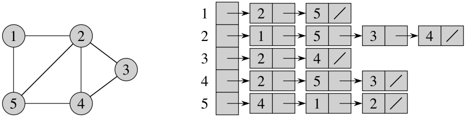
Datastrukturer for grafer

Graf-repræsentationer:

Datastrukturer for grafer

Graf-repræsentationer:

Adjacency list og adjacency matrix



(a) (b)

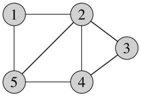
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

(c)

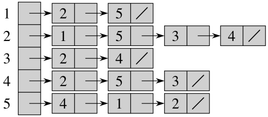
Datastrukturer for grafer

Graf-repræsentationer:

Adjancency list og adjancency matrix



(a)



(b)

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

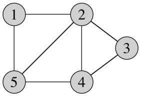
(c)

Plads: Henholdsvis $O(n+m)$ og $O(n^2)$.

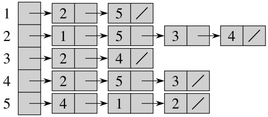
Datastrukturer for grafer

Graf-repræsentationer:

Adjancency list og adjancency matrix



(a)



(b)

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

(c)

Plads: Henholdsvis $O(n + m)$ og $O(n^2)$.

Hvis ikke andet oplyses, bruges adjancency list repræsentationen i algoritmer i resten af kurset.

Husk: en kant i en uorienterede graf repræsenteres som to orienterede kanter.

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide
- Færdigbehandlede knuder er sorte

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide
- Færdigbehandlede knuder er sorte
- Knuder i fronten (mødte, men ikke færdigbehandlede) er grå

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide
- Færdigbehandlede knuder er sorte
- Knuder i fronten (mødte, men ikke færdigbehandlede) er grå
- Når en knude v ($\neq s$) mødes første gang husker den, hvem der opdagede den (dens predecessor) i variablen $v.\pi$.

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide
- Færdigbehandlede knuder er sorte
- Knuder i fronten (mødte, men ikke færdigbehandlede) er grå
- Når en knude v ($\neq s$) mødes første gang husker den, hvem der opdagede den (dens predecessor) i variablen $v.\pi$.
- Vi bruger adjacency list repræsentationen.

Grafgennemløb

To grundlæggende metoder:

- Breath-First-Search (BFS)
- Depth-First-Search (DFS):

Fælles for BFS og DFS:

- En startknude (source) s
- Ikke-mødte knuder er hvide
- Færdigbehandlede knuder er sorte
- Knuder i fronten (mødte, men ikke færdigbehandlede) er grå
- Når en knude v ($\neq s$) mødes første gang husker den, hvem der opdagede den (dens predecessor) i variablen $v.\pi$.
- Vi bruger adjacency list repræsentationen.

Bemærk: Kanterne $(v, v.\pi)$ udgør tilsammen altid et træ med s som rod og indeholdende alle opdagede knuder (ses nemt via induktion over antal mødte knuder).

Bredde-Først-Søgning (BFS)

Holder de grå knuder (fronten) i en KØ.

Bredde-Først-Søgning (BFS)

Holder de grå knuder (fronten) i en KØ.

Tilføjer også en variabel $v.d$ til alle knuder v (d for distance.)

Bredde-Først-Søgning (BFS)

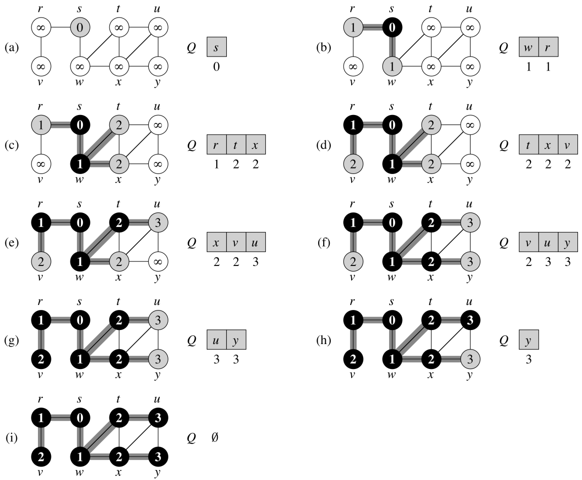
Holder de grå knuder (fronten) i en KØ.

Tilføjer også en variabel $v.d$ til alle knuder v (d for distance.)

```
BFS(G, s)
for each vertex u ∈ G.V − {s}
    u.color = WHITE
    u.d = ∞
    u.π = NIL
s.color = GRAY
s.d = 0
s.π = NIL
Q = ∅
ENQUEUE(Q, s)
while Q ≠ ∅
    u = DEQUEUE(Q)
    for each v ∈ G.Adj[u]
        if v.color == WHITE
            v.color = GRAY
            v.d = u.d + 1
            v.π = u
            ENQUEUE(Q, v)
    u.color = BLACK
```

Bredde-Først-Søgning (BFS)

Eksempel:



Egenskaber

Køretid: $O(n + m)$

Egenskaber

Køretid: $O(n + m)$

Bevis: Initialisering tager $O(n)$ tid. I resten af algoritmen kan en knude ikke indsættes i køen mere end een gang (pga. farvemærkningen), så maksimalt arbejde er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Egenskaber

Køretid: $O(n + m)$

Bevis: Initialisering tager $O(n)$ tid. I resten af algoritmen kan en knude ikke indsættes i køen mere end een gang (pga. farvemærkningen), så maksimalt arbejde er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Definition: $\delta(s, v)$ er længden af en korteste sti, *målt i antal kanter*, fra startknuden s til knuden v. Findes ingen sti, defineres $\delta(s, v) = \infty$.

Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$

Bevis: Initialisering tager $O(n)$ tid. I resten af algoritmen kan en knude ikke indsættes i køen mere end een gang (pga. farvemærkningen), så maksimalt arbejde er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Definition: $\delta(s, v)$ er længden af en korteste sti, *målt i antal kanter*, fra startknuden s til knuden v. Findes ingen sti, defineres $\delta(s, v) = \infty$.

Sætning:

1. Når BFS stopper, har den nået alle knuder v for hvilke der findes en sti fra startknuden s til v.
2. En sti af længde $v.d$ kan for alle nåede knuder findes (i baglæns rækkefølge) ved at følge predecessor-referencer $v.d$ gange, startende fra v (dvs. $v.\pi$, $(v.\pi).\pi$, $((v.\pi).\pi).\pi, \ldots$), og $.d$-værdierne for knuderne på denne sti falder med een for hvert skridt.
3. Når BFS stopper, gælder $v.d = \delta(s, v)$ for alle knuder.

Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$

Bevis: Initialisering tager $O(n)$ tid. I resten af algoritmen kan en knude ikke indsættes i køen mere end een gang (pga. farvemærkningen), så maksimalt arbejde er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Definition: $\delta(s, v)$ er længden af en korteste sti, *målt i antal kanter*, fra startknuden s til knuden v. Findes ingen sti, defineres $\delta(s, v) = \infty$.

Sætning:

1. Når BFS stopper, har den nået alle knuder v for hvilke der findes en sti fra startknuden s til v.
2. En sti af længde $v.d$ kan for alle nåede knuder findes (i baglæns rækkefølge) ved at følge predecessor-referencer $v.d$ gange, startende fra v (dvs. $v.\pi$, $(v.\pi).\pi$, $((v.\pi).\pi).\pi, \ldots$), og $.d$-værdierne for knuderne på denne sti falder med een for hvert skridt.
3. Når BFS stopper, gælder $v.d = \delta(s, v)$ for alle knuder.

Dvs. BFS kan finde korteste veje (målt i antal kanter) fra alle v til s.

Bevis

Bemærk først at en knude v indsættes i køen een gang, så $v.d$ og $v.\pi$ gives en værdi præcis een gang.

Bevis

Bemærk først at en knude v indsættes i køen een gang, så $v.d$ og $v.\pi$ gives en værdi præcis een gang.

Punkt 1):

Bevis

Bemærk først at en knude v indsættes i køen een gang, så $v.d$ og $v.\pi$ gives en værdi præcis een gang.

Punkt 1):

Antag der findes en knude, som kan nås med en sti fra s, men som BFS ikke når. Lad v være første knude (set fra s) på denne sti som BFS ikke når, og lad u være knuden før på stien. Da u blev taget ud af køen, burde v (som er i u's naboliste) være nået. Modstrid.

Bevis

Bemærk først at en knude v indsættes i køen een gang, så $v.d$ og $v.\pi$ gives en værdi præcis een gang.

Punkt 1):

Antag der findes en knude, som kan nås med en sti fra s, men som BFS ikke når. Lad v være første knude (set fra s) på denne sti som BFS ikke når, og lad u være knuden før på stien. Da u blev taget ud af køen, burde v (som er i u's naboliste) være nået. Modstrid.

Punkt 2):

Bevis

Bemærk først at en knude v indsættes i køen een gang, så $v.d$ og $v.\pi$ gives en værdi præcis een gang.

Punkt 1):

Antag der findes en knude, som kan nås med en sti fra s, men som BFS ikke når. Lad v være første knude (set fra s) på denne sti som BFS ikke når, og lad u være knuden før på stien. Da u blev taget ud af køen, burde v (som er i u's naboliste) være nået. Modstrid.

Punkt 2):

Induktion over antal indsættelser i køen: Når en knude u udtages af køen, og en knude v fra u's naboliste indsættes i køen, sættes $v.d = u.d + 1$ og $v.\pi = u$. Hvis udsagnet galdt for u, kommer det klart til at gælde for v. Basis er første indsættelse (af s, for hvilken udsagnet gælder pga. initialiseringen i BFS).

Bevis

Punkt 3):

Bevis

Punkt 3):

Definér for heltal $i \geq 0$:

- $\Delta_i = \{v \in V \mid \delta(s, v) = i\}$, dvs. de knuder, som faktisk har afstand i til s.
- $D_i = \{v \in V \mid v.d = i\}$, dvs. de knuder, som algoritmen påstår har afstand i til s.

Bevis

Punkt 3):

Definér for heltal $i \geq 0$:

- $\Delta_i = \{v \in V \mid \delta(s, v) = i\}$, dvs. de knuder, som faktisk har afstand i til s.
- $D_i = \{v \in V \mid v.d = i\}$, dvs. de knuder, som algoritmen påstår har afstand i til s.

Vi viser via induktion på i at for alle i gælder

$$\Delta_i = D_i.$$

Bevis

Punkt 3):

Definér for heltal $i \geq 0$:

- $\Delta_i = \{v \in V \mid \delta(s, v) = i\}$, dvs. de knuder, som faktisk har afstand i til s.
- $D_i = \{v \in V \mid v.d = i\}$, dvs. de knuder, som algoritmen påstår har afstand i til s.

Vi viser via induktion på i at for alle i gælder

$$\Delta_i = D_i.$$

Dette vil medføre punkt 3) for alle knuder, der kan nås fra s. For resten af knuderne forbliver $v.d = \infty$ efter initialisering [pga. punkt 2)], så punkt 3) gælder også for dem.

Bevis

Punkt 3):

Definér for heltal $i \geq 0$:

- $\Delta_i = \{v \in V \mid \delta(s, v) = i\}$, dvs. de knuder, som faktisk har afstand i til s.
- $D_i = \{v \in V \mid v.d = i\}$, dvs. de knuder, som algoritmen påstår har afstand i til s.

Vi viser via induktion på i at for alle i gælder

$$\Delta_i = D_i.$$

Dette vil medføre punkt 3) for alle knuder, der kan nås fra s. For resten af knuderne forbliver $v.d = \infty$ efter initialisering [pga. punkt 2)], så punkt 3) gælder også for dem.

Observér først at BFS-algoritment starter med $D_0 = \{s\}$ i køen, og derefter for $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ udtager alle knuder i D_i mens den indsætter alle knuder i D_{i+1}.

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Basis (i=0): klar, da $D_0 = \{s\} = \Delta_0$.

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Basis (i=0): klar, da $D_0 = \{s\} = \Delta_0$.

Induktionssskridt: antag udsagn er sandt for $i - 1$ og lavere, vis det er sandt for i.

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Basis (i=0): klar, da $D_0 = \{s\} = \Delta_0$.

Induktionssskridt: antag udsagn er sandt for $i-1$ og lavere, vis det er sandt for i.

For en knude $v \in D_i$ eksisterer via punkt 2) en sti fra s til v af længde i. Derfor gælder $\delta(s,v) \leq i$. Vi kan ikke have $\delta(s,v) \leq i-1$, da induktionsantagelse så ville give $v.d = \delta(s,v) \leq i-1$, i modstrid med $v \in D_i$. Derfor er $\delta(s,v) = i$. Dette viser $D_i \subseteq \Delta_i$.

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Basis (i=0): klar, da $D_0 = \{s\} = \Delta_0$.

Induktionssskridt: antag udsagn er sandt for $i-1$ og lavere, vis det er sandt for i.

For en knude $v \in D_i$ eksisterer via punkt 2) en sti fra s til v af længde i. Derfor gælder $\delta(s,v) \leq i$. Vi kan ikke have $\delta(s,v) \leq i-1$, da induktionsantagelse så ville give $v.d = \delta(s,v) \leq i-1$, i modstrid med $v \in D_i$. Derfor er $\delta(s,v) = i$. Dette viser $D_i \subseteq \Delta_i$.

For enhver knude $u \in \Delta_i$ eksisterer pr. definition af δ en sti fra s til u af længde i. For næstsidste knude w på denne sti gælder $\delta(s,w) = i-1$. Fra induktionsantagelsen får vi at $w.d = \delta(s,w)$. Da w blev taget ud af køen, var u (en nabo til w) enten hvid, eller u var allerede nået fra en knude t, som allerede var taget ud og derfor (via observationen på sidste side) har $t.d \leq w.d$. I begge tilfælde bliver $u.d$ blev sat til højst $w.d + 1 = \delta(s,w) + 1 = i = \delta(s,u)$. Fra punkt 2) haves $u.d \geq \delta(s,u)$. I alt gælder $u.d = \delta(s,u)$. Dette viser $\Delta_i \subseteq D_i$.

Bevis

Induktionsbevis for $\Delta_i = D_i$:

Basis (i=0): klar, da $D_0 = \{s\} = \Delta_0$.

Induktionssskridt: antag udsagn er sandt for $i-1$ og lavere, vis det er sandt for i.

For en knude $v \in D_i$ eksisterer via punkt 2) en sti fra s til v af længde i. Derfor gælder $\delta(s,v) \leq i$. Vi kan ikke have $\delta(s,v) \leq i-1$, da induktionsantagelse så ville give $v.d = \delta(s,v) \leq i-1$, i modstrid med $v \in D_i$. Derfor er $\delta(s,v) = i$. Dette viser $D_i \subseteq \Delta_i$.

For enhver knude $u \in \Delta_i$ eksisterer pr. definition af δ en sti fra s til u af længde i. For næstsidste knude w på denne sti gælder $\delta(s,w) = i-1$. Fra induktionsantagelsen får vi at $w.d = \delta(s,w)$. Da w blev taget ud af køen, var u (en nabo til w) enten hvid, eller u var allerede nået fra en knude t, som allerede var taget ud og derfor (via observationen på sidste side) har $t.d \leq w.d$. I begge tilfælde bliver $u.d$ blev sat til højst $w.d + 1 = \delta(s,w) + 1 = i = \delta(s,u)$. Fra punkt 2) haves $u.d \geq \delta(s,u)$. I alt gælder $u.d = \delta(s,u)$. Dette viser $\Delta_i \subseteq D_i$.

Alt i alt: $\Delta_i = D_i$.

Dybde-Først-Søgning (DFS)

Holder de grå knuder (fronten) i en STAK.

Dybde-Først-Søgning (DFS)

Holder de grå knuder (fronten) i en STAK.

Stakken er implicit i den rekursive formulering nedenfor (er rekursionsstakken), men kan også kodes eksplicit.

Mere præcist: elementerne på stakken er de grå knuder, hver med en delvist gennemløbet naboliste [gennemløbet i for-løkken i DFS-VISIT].

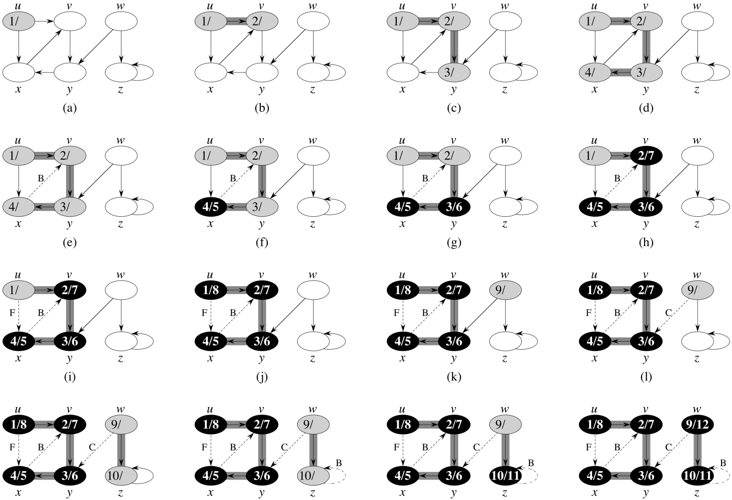
DFS tilføjer også timestamps $u.d$ for "discovery" (hvid $\rightarrow$ grå) og $u.f$ for "finish" (grå $\rightarrow$ sort) til alle knuder u.

```
DFS(G)
  for each vertex u ∈ G.V
      u.color = WHITE
      u.π = NIL
  time = 0
  for each vertex u ∈ G.V
      if u.color == WHITE
          DFS-VISIT(G, u)
```

```
DFS-VISIT(G, u)
  time = time + 1              // white vertex u has just been discovered
  u.d = time
  u.color = GRAY
  for each v ∈ G.Adj[u]        // explore edge (u, v)
      if v.color == WHITE
          v.π = u
          DFS-VISIT(G, v)
  u.color = BLACK              // blacken u; it is finished
  time = time + 1
  u.f = time
```

Dybde-Først-Søgning (DFS)

Eksempel:



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k) (l) (m) (n) (o) (p)

Egenskaber

Køretid: $O(n + m)$

Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$

Bevis: Den ydre algoritme DFS tager $O(n)$ tid. Hovedalgoritmen DFS-Visit kan ikke kaldes på en knude mere end een gang (pga. farvemærkningen), så arbejdet dér er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$

Bevis: Den ydre algoritme DFS tager $O(n)$ tid. Hovedalgoritmen DFS-Visit kan ikke kaldes på en knude mere end een gang (pga. farvemærkningen), så arbejdet dér er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Observér:

- Discovery (hvid $\rightarrow$ grå) af v = sæt $v.d$ = kald af DFS-Visit på v = PUSH af v på stakken.
- Finish (grå $\rightarrow$ sort) af v = sæt $v.f$ = retur fra kald af DFS-Visit på v = POP af v fra stakken.

Egenskaber

Køretid: $O(n+m)$

Bevis: Den ydre algoritme DFS tager $O(n)$ tid. Hovedalgoritmen $\mathrm{DFS\text{-}V{\scriptsize ISIT}}$ kan ikke kaldes på en knude mere end een gang (pga. farvemærkningen), så arbejdet dér er proportionalt med eet gennemløb af alle nabolister, dvs. $O(m)$ arbejde.

Observér:

- Discovery (hvid $\rightarrow$ grå) af v = sæt $v.d$ = kald af $\mathrm{DFS\text{-}V{\scriptsize ISIT}}$ på v = PUSH af v på stakken.
- Finish (grå $\rightarrow$ sort) af v = sæt $v.f$ = retur fra kald af $\mathrm{DFS\text{-}V{\scriptsize ISIT}}$ på v = POP af v fra stakken.

Kanten $(v, v.\pi)$ sættes ved kald af $\mathrm{DFS\text{-}V{\scriptsize ISIT}}$ på v. Af dette, samt ovenstående:

- Kanterne $(v, v.\pi)$ udgør præcis rekursionstræerne for $\mathrm{DFS\text{-}V{\scriptsize ISIT}}$ (eet træ for hvert kald fra DFS).
- Intervallet $[v.d, v.f]$ er den periode v er på stakken.

Egenskaber

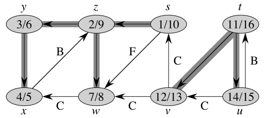
Hvis u og v er på en stak samtidig, og v er pushed sidst, må v poppes før u kan poppes.

Af dette, samt at push/pop sætter d/f, følger at for alle knuder u og v må intervallerne $[u.d, u.f]$ og $[v.d, v.f]$ enten være disjunkte (u og v var ikke på stakken samtidig) eller det ene må være helt indeholdt i den andet (knuden med det største interval kom på stakken først).

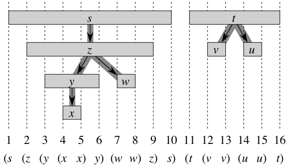
Egenskaber

Hvis u og v er på en stak samtidig, og v er pushed sidst, må v poppes før u kan poppes.

Af dette, samt at push/pop sætter d/f, følger at for alle knuder u og v må intervallerne $[u.d, u.f]$ og $[v.d, v.f]$ enten være disjunkte (u og v var ikke på stakken samtidig) eller det ene må være helt indeholdt i den andet (knuden med det største interval kom på stakken først).



Discovery- og finish-tider er derfor nestede som parenteser er det.

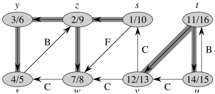


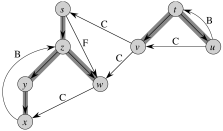
Egenskaber

Når en kant (u, v) undersøges fra u haves flg. tilfælde:

1. *tree-kanter:* v hvid. Her er $u.d < v.d < v.f < u.f$.
2. *back-kanter:* v ikke-hvid (grå/er på stak). Her er $v.d < u.d < u.f < v.f$.
3. *forward-kanter:* v ikke-hvid (sort/er ikke længere på stak, men har været det sammen med u). Her er $u.d < v.d < v.f < u.f$.
4. *cross-kanter:* v ikke-hvid (sort/er ikke længere på stak, og har ikke været det sammen med u). Her er $v.d < v.f < u.d < u.f$.

Bemærk at de kan genkendes under DFS via farvningen og d/f-værdierne i knuder, samt tiden nu.





Egenskaber

1. *tree-kanter:* v hvid
2. *back-kanter:* v ikke-hvid (grå/er på stak) og v's interval indeholder u's
3. *forward-kanter:* v ikke-hvid (sort/er ikke længere på stak) og v's interval er indeholdt i u's
4. *cross-kanter:* v ikke-hvid (sort/er ikke længere på stak) og v's interval er før u's

For *uorienterede grafer* er der kun tree-kanter og back-kanter (såfremt en kant kategoriseres første gang den undersøges fra een af dens ender).

Dette følger af at u allerede må være blevet undersøgt fra v hvis v er sort/ikke længere på stak og kanten (v, u) må derfor allerede være kategoriseret. Derved kan 3 og 4 ikke opstå.

DAGs og topologisk sortering

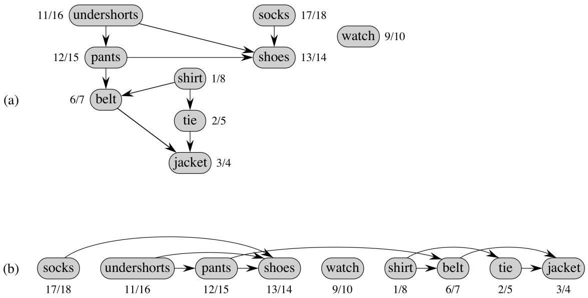
DAG $=$ Directed Acyclic Graph.

Topologisk sortering af en DAG: en lineær ordning af knuderne så alle kanter går fra venstre til højre.

DAGs og topologisk sortering

DAG = Directed Acyclic Graph.

Topologisk sortering af en DAG: en lineær ordning af knuderne så alle kanter går fra venstre til højre.



DAGs og topologisk sortering

Lemma: En orienteret graf har en kreds (cycle) $\Leftrightarrow$ der findes back-edges under et DFS-gennemløb.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: En orienteret graf har en kreds (cycle) $\Leftrightarrow$ der findes back-edges under et DFS-gennemløb.

Bevis:

$\Rightarrow$: Se på første knude v i kredsen som bliver grå - dvs. alle andre knuder u i kredsen har $v.d < u.d$. Da intervaller enten er helt indeholdt i hinanden eller er disjunkte, gælder enten $v.d < u.d < u.f < v.d$ eller $v.f < u.d$.

Antag det sidste tilfælde forekommer, og se på den første (set fra v) sådanne knude u i kredsen, og lad w være dens forgænger (evt. v selv). Da haves $w.f \leq v.f < u.d$, men pga. kanten (w, u) kan dette ikke forekomme (kanten må blive undersøgt, og u opdaget inden w er færdig).

Så kun første tilfælde forekommer. Specielt gælder dette sidste knude u' i kredsen (som peger på v), hvorved kanten (u', v) erklæres en backedge.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: En orienteret graf har en kreds (cycle) $\Leftrightarrow$ der findes back-edges under et DFS-gennemløb.

Bevis:

$\Rightarrow$: Se på første knude v i kredsen som bliver grå - dvs. alle andre knuder u i kredsen har $v.d < u.d$. Da intervaller enten er helt indeholdt i hinanden eller er disjunkte, gælder enten $v.d < u.d < u.f < v.d$ eller $v.f < u.d$.

Antag det sidste tilfælde forekommer, og se på den første (set fra v) sådanne knude u i kredsen, og lad w være dens forgænger (evt. v selv). Da haves $w.f \leq v.f < u.d$, men pga. kanten (w, u) kan dette ikke forekomme (kanten må blive undersøgt, og u opdaget inden w er færdig).

Så kun første tilfælde forekommer. Specielt gælder dette sidste knude u' i kredsen (som peger på v), hvorved kanten (u', v) erklæres en backedge.

$\Leftarrow$: Når en back-edge findes: Der er en kreds af trækanter (mellem knuderne som lige nu er på stakken) og een back-kant.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: For en kant (u, v) gælder $u.f < v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: For en kant (u, v) gælder $u.f < v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

Bevis: Check de fire edge cases (tree, back, forward, cross), brug parentes-strukturen af discovery- og finish-tider.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: For en kant (u, v) gælder $u.f < v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

Bevis: Check de fire edge cases (tree, back, forward, cross), brug parentes-strukturen af discovery- og finish-tider.

Korollar til to foregående lemmaer: Graf er en DAG $\Leftrightarrow$ DFS finder ingen back-edges $\Leftrightarrow$ ordning af knuder efter faldende finish-tider giver en topologisk sortering.

DAGs og topologisk sortering

Lemma: For en kant (u, v) gælder $u.f < v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

Bevis: Check de fire edge cases (tree, back, forward, cross), brug parentes-strukturen af discovery- og finish-tider.

Korollar til to foregående lemmaer: Graf er en DAG $\Leftrightarrow$ DFS finder ingen back-edges $\Leftrightarrow$ ordning af knuder efter faldende finish-tider giver en topologisk sortering.

```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
    call DFS(G) to compute finishing times v.f for each vertex v
    as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
    return the linked list of vertices
```

DAGs og topologisk sortering

Lemma: For en kant (u, v) gælder $u.f < v.f \Leftrightarrow$ kanten er en back-edge.

Bevis: Check de fire edge cases (tree, back, forward, cross), brug parentes-strukturen af discovery- og finish-tider.

Korollar til to foregående lemmaer: Graf er en DAG $\Leftrightarrow$ DFS finder ingen back-edges $\Leftrightarrow$ ordning af knuder efter faldende finish-tider giver en topologisk sortering.

```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
    call DFS(G) to compute finishing times v.f for each vertex v
    as each vertex is finished, insert it onto the front of a linked list
    return the linked list of vertices
```

Tid: $O(n + m)$.