Sortering

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, telefonbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, telefonbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering af information er en fundamental og central opgave.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \to 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, telefonbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering af information er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som rene tal.

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

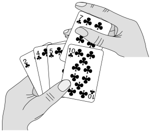
$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 9$$

Kommentarer:

- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som rene tal.
- Vi vil antage at input ligger i et array. Mange sorteringsalgoritmer vil også kunne implementeres når input er en lænket liste.

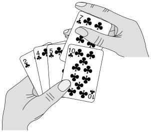
Insertionsort

Bruges af mange når man sorterer en hånd i kort:

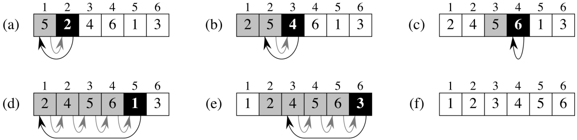


Insertionsort

Bruges af mange når man sorterer en hånd i kort:

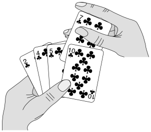


Samme idé udført på tal i et array:

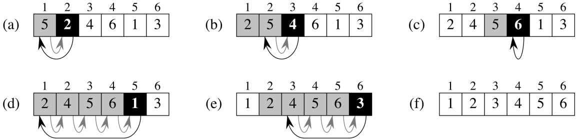


Insertionsort

Bruges af mange når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i et array:

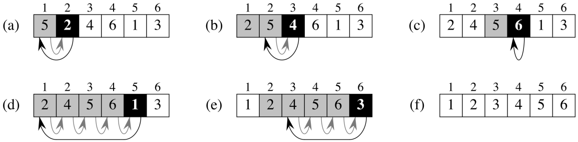


Argument for korrekthed: Del af array til venstre for sorte felt er altid sorteret. Denne del udvides med een hele tiden ($\Rightarrow$ algoritmen stopper, med alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

```
INSERTION-SORT(A, n)
  for j = 2 to n
      key = A[j]
      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```



Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \,..\, j-1]$.	0	$n-1$
$i = j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$i = i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres (dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører, hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen).

Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1 \mathinner{..} j-1]$.	0	$n-1$
$i = j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$i = i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres (dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører, hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen).

Best case: $t_j = 1$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i = j - 1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres (dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører, hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen).

Best case: $t_j = 1$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Worst case: $t_j = j$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n^2$. (Da $\sum_{j=1}^{n} j = \dfrac{(n+1)n}{2}$).

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

S = input
S' = tom liste
Repeat:
    find mindste element x i S
    flyt x fra S til enden af S'

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

S = input
S' = tom liste
Repeat:
  find mindste element x i S
  flyt x fra S til enden af S'

Klart korrekt.

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

$S =$ input
$S' =$ tom liste
Repeat:
  find mindste element x i S
  flyt x fra S til enden af S'

Klart korrekt.

Køretid?

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

> S = input
> S' = tom liste
> Repeat:
>   find mindste element x i S
>   flyt x fra S til enden af S'

Klart korrekt.

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i S. Simpel metode er lineær søgning $\Rightarrow$ tid $\leq c \cdot (n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) \leq c \cdot n^2$.

Merge

Input: To sorterede rækker 2,4,5,7 1,2,3,6

Merge

Input:	To sorterede rækker	2,4,5,7	1,2,3,6
Output:	De samme elementer i een sorteret række	1,2,2,3,4,5,6,7	

Merge

Input:	To sorterede rækker	2,4,5,7	1,2,3,6
Output:	De samme elementer i een sorteret række	1,2,2,3,4,5,6,7	

Vi kan naturligvis sortere.

Merge

Input:	To sorterede rækker	2,4,5,7 1,2,3,6
Output:	De samme elementer i een sorteret række	1,2,2,3,4,5,6,7

Vi kan naturligvis sortere. Men hurtigere at flette (merge):

Repeat:
    Flyt det mindste af de to forreste elementer

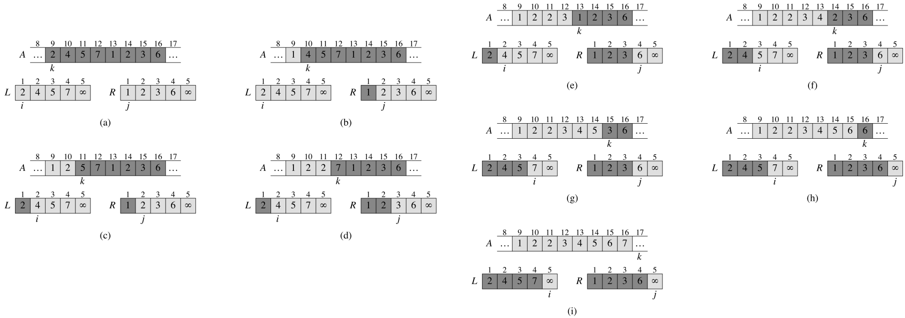
Merge

Input:	To sorterede rækker	2,4,5,7	1,2,3,6
Output:	De samme elementer i een sorteret række	1,2,2,3,4,5,6,7	

Vi kan naturligvis sortere. Men hurtigere at flette (merge):

Repeat:

Flyt det mindste af de to forreste elementer

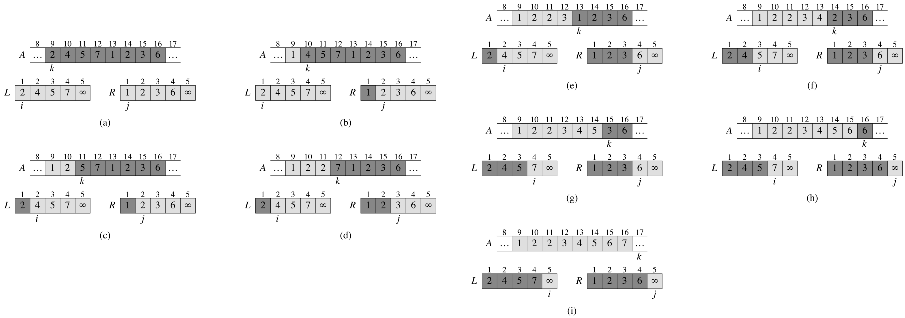


Merge

Input:	To sorterede rækker	2,4,5,7 1,2,3,6
Output:	De samme elementer i een sorteret række	1,2,2,3,4,5,6,7

Vi kan naturligvis sortere. Men hurtigere at flette (merge):

Repeat:
  Flyt det mindste af de to forreste elementer



Tid: $\leq c \cdot n$, hvor $n =$ antal elementer i alt.

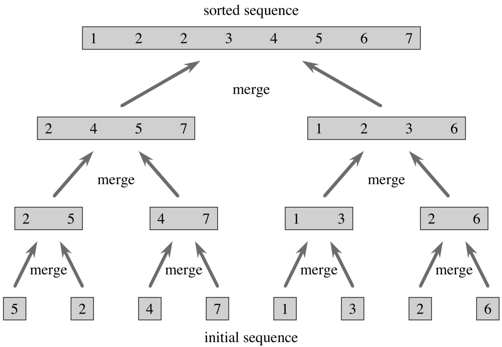
Merge

Som pseudo-kode, med to rækker $A[p \dots q]$ and $A[q+1 \dots r]$:

```
MERGE(A, p, q, r)
  n_1 = q - p + 1
  n_2 = r - q
  let L[1 .. n_1 + 1] and R[1 .. n_2 + 1] be new arrays
  for i = 1 to n_1
      L[i] = A[p + i - 1]
  for j = 1 to n_2
      R[j] = A[q + j]
  L[n_1 + 1] = ∞
  R[n_2 + 1] = ∞
  i = 1
  j = 1
  for k = p to r
      if L[i] ≤ R[j]
          A[k] = L[i]
          i = i + 1
      else A[k] = R[j]
          j = j + 1
```

Mergesort

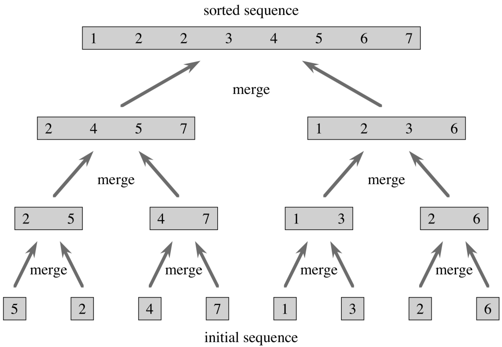
Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:



Tid:

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:

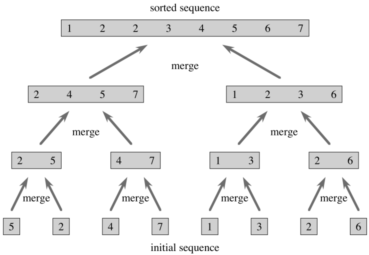


Tid: $\log_2 n$ lag, som hver koster $\leq c \cdot n$, dvs. $\leq c \cdot n \cdot \log_2 n$ i alt.

Mergesort

Som pseudo-kode, formuleret rekursivt:

```
MERGE-SORT(A, p, r)
 if p < r                        // check for base case
     q = ⌊(p + r)/2⌋             // divide
     MERGE-SORT(A, p, q)         // conquer
     MERGE-SORT(A, q + 1, r)     // conquer
     MERGE(A, p, q, r)           // combine
```



Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Bland de to sorterede dele til een sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$

Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Bland de to sorterede dele til een sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$

Quicksort:

- Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$

[Hoare, 1960]

Quicksort

Som pseudo-kode:

$\textsc{Quicksort}(A, p, r)$
  if $p < r$
    $q = \textsc{Partition}(A, p, r)$
    $\textsc{Quicksort}(A, p, q - 1)$
    $\textsc{Quicksort}(A, q + 1, r)$

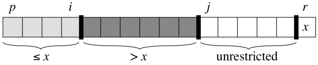
Partition

Hvordan lave partition i to dele $X \leq Y$?

Partition

Hvordan lave partition i to dele $X \leq Y$?

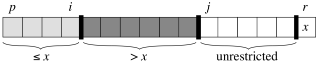
Vælg element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del).
Opbyg de to dele $X \leq Y$ under et gennemløb af array ud fra flg. princip:



Partition

Hvordan lave partition i to dele $X \leq Y$?

Vælg element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del).
Opbyg de to dele $X \leq Y$ under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

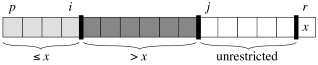


Hvordan tage et skridt under gennemløb?

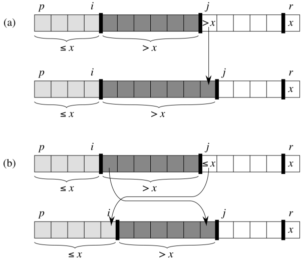
Partition

Hvordan lave partition i to dele $X \leq Y$?

Vælg element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del).
Opbyg de to dele $X \leq Y$ under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

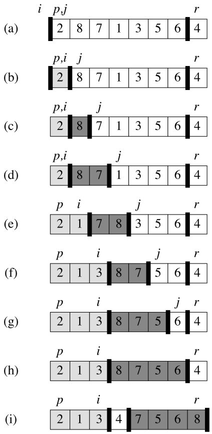


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



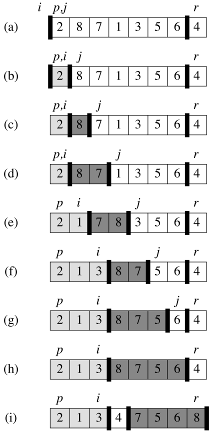
Partition

Et eksempel på gennemløb:



Partition

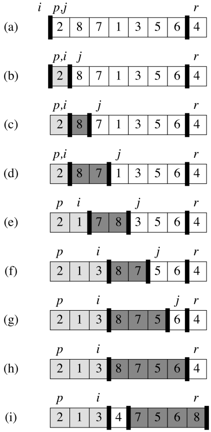
Et eksempel på gennemløb:



Tid:

Partition

Et eksempel på gennemløb:



Tid: $O(n)$.

Quicksort køretid

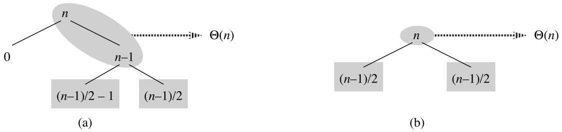
Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

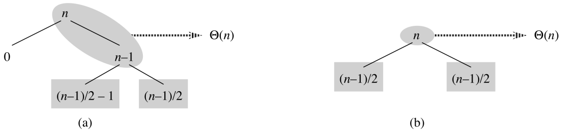
To ekstremer:



Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer:



- Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (samme analyse som for Mergesort).
- Hvis alle partitions er helt ubalancerede: $O(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- I praksis meget ofte tæt på best case.
- Dog er sorteret input worst case for ovenstående partition (brug ikke den i praksis).
- Mere robuste partition: vælg opdelingselement x som midterelementet, medianen af flere elementer, et tilfældigt element, eller medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- Kode effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. Java og C++/STL).

Heapsort

En Heap er:

Heapsort

En Heap er:

- et binært træ

Heapsort

En Heap er:

- et binært træ
- med heap-orden

Heapsort

En Heap er:

- et binært træ
- med heap-orden
- og heap-facon

Heapsort

En Heap er:

- et binært træ
- med heap-orden
- og heap-facon
- udlagt i et array

Heapsort

En Heap er:

- et binært træ
- med heap-orden
- og heap-facon
- udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførsel. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

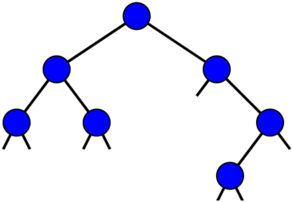
Binært træ

Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

- en knude v (evt. med indhold af data) samt to undertræer (et højre og et venstre).



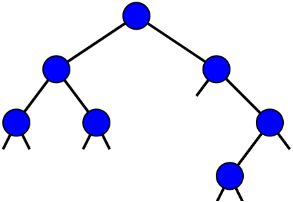
Binært træ

Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

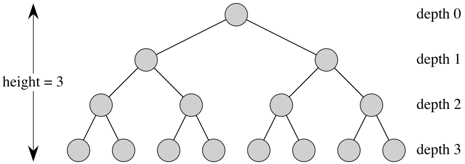
- en knude *v* (evt. med indhold af data) samt to undertræer (et højre og et venstre).



Knuden *v* kaldes også rod for træet. Roden af et (ikke-tomt) undertræ af *v* kaldes for et barn af *v*, og *v* kaldes dennes forælder. Hvis begge *v*'s undetræer er tomme, kaldes *v* et blad.

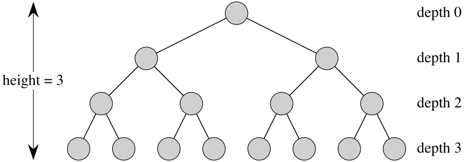
Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ med alle blade i samme dybde.



Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ med alle blade i samme dybde.



Et fuldt binært træ af højde h har

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.5 side 1147), heraf 2^h blade.

Heaporden

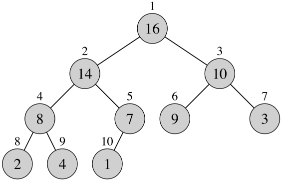
Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$

Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



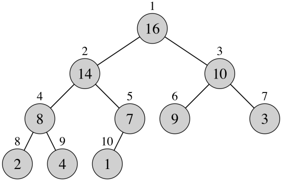
(a)

NB: dubletter er tilladt (ikke vist)

Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



(a)

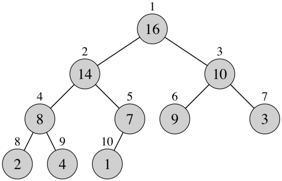
NB: dubletter er tilladt (ikke vist)

Det er min-heapordnet hvis der gælder

$$\text{nøgle i } v \leq \text{nøgle i } u$$

Heapfacon

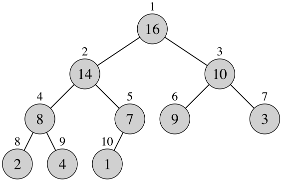
Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



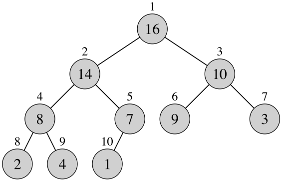
(a)

For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h - 1 = 2^h - 1$$

Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

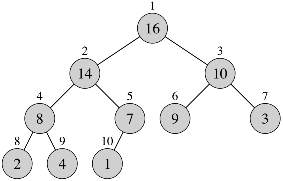
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h-1 = 2^h - 1$$

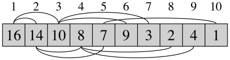
$$n > 2^h - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 2^h \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(n+1) > h$$

Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



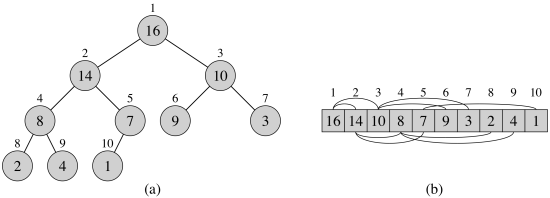
(a)



(b)

Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- Forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- Børn på plads $2i$ og $2i + 1$

(Se figur ovenfor. Formelt bevis til eksaminatorier.)

Operationer på en heap

- MAX-HEAPIFY: Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.
- BUILD-MAX-HEAP: Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning:

Max-Heapify

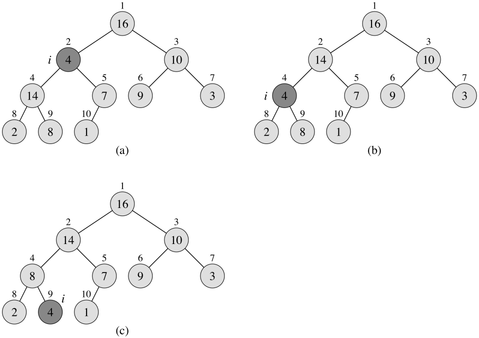
Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter Max-Heapify på dette barn.

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

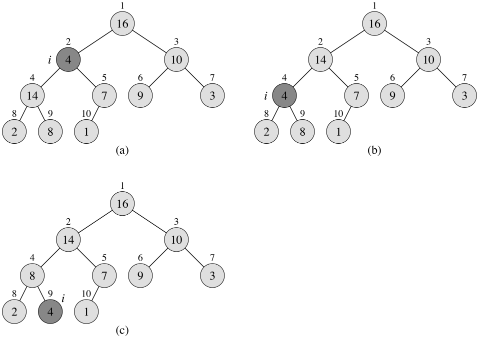


(a) (b) (c)

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.



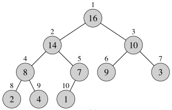
Tid: O(højde af knude).

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger “for langt” i arrayet, dvs. længere end plads n):

MAX-HEAPIFY(A, i, n)

$l = $ LEFT(i)
$r = $ RIGHT(i)
if $l \leq n$ and $A[l] > A[i]$
    $largest = l$
else $largest = i$
if $r \leq n$ and $A[r] > A[largest]$
    $largest = r$
if $largest \neq i$
    exchange $A[i]$ with $A[largest]$
    MAX-HEAPIFY$(A, largest, n)$



(a)

Build-Heap

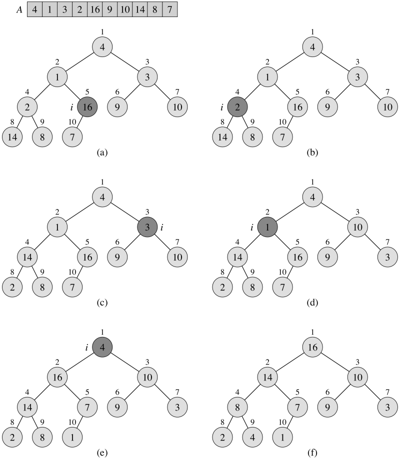
Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse een overholder altid heaporder.

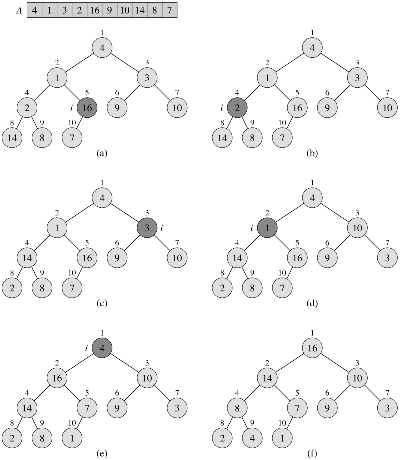
Build-Heap

Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse een overholder altid heaporder.

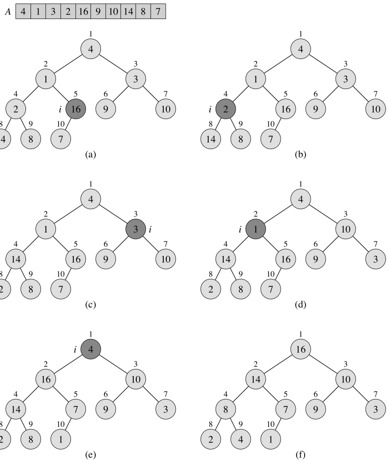


Build-Heap



Tid:

Build-Heap



Tid: $O(n \log_2 n)$ klart. Bedre analyse giver $O(n)$.

Build-Heap

Som pseudo-kode:

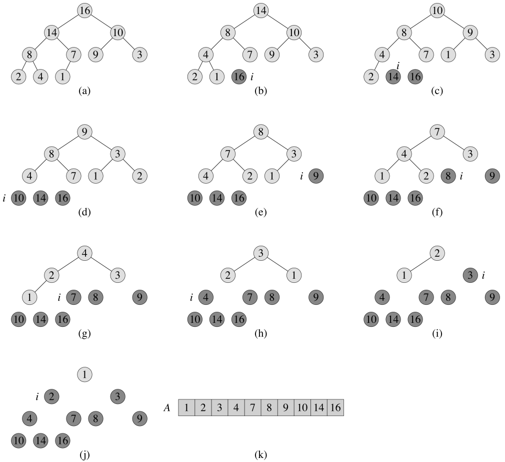
BUILD-MAX-HEAP(A, n)
for $i = \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
    MAX-HEAPIFY(A, i, n)

Heapsort

Byg en heap. Gentag: fjern rod (største element i heap), sæt sidste element op som rod, kald MAX-HEAPIFY.

Heapsort

Byg en heap. Gentag: fjern rod (største element i heap), sæt sidste element op som rod, kald MAX-HEAPIFY.



Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $n \log n$ sorteringsalgoritmer

	Worstcase	Inplace
QuickSort		$\surd$
MergeSort	$\surd$	
HeapSort	$\surd$	$\surd$

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i standardbiblioteket STL for C++).