Minimum udSpændende Træer (MST)

Træer

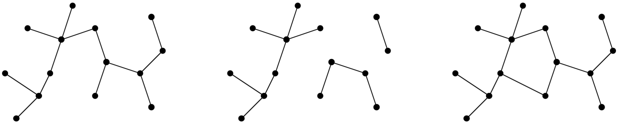
Et (frit/u-rodet) træ er en *uorienteret* graf $G = (V, E)$ som er

- Sammenhængende: der er en sti mellem alle par af knuder.
- Acyklisk: der er ingen kreds af kanter.

Træer

Et (frit/u-rodet) træ er en *uorienteret* graf $G = (V, E)$ som er

- Sammenhængende: der er en sti mellem alle par af knuder.
- Acyklisk: der er ingen kreds af kanter.



(a) (b) (c)

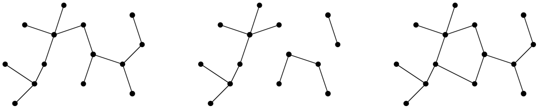
Træ Skov Graf med kreds (ikke træ)

(Uorienteret, acyklisk graf = skov af træer.).

Træer

Sætning (B.2): For *uorienteret* graf $G = (V, E)$ er flg. ækvivalent (gælder det ene, gælder det andet):

- G er et træ (dvs. sammenhængende og acyklisk).
- G er sammenhængende, men er det ikke hvis nogen kant fjernes.
- G er sammenhængende og $m = n - 1$.
- G er acyklisk, men er det ikke hvis nogen kant tilføjes.
- G er acyklisk og $m = n - 1$.
- Mellem alle par af knuder er der præcis én vej.

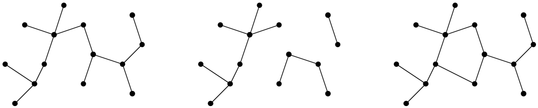


(a) (b) (c)

Træer

Sætning (B.2): For *uorienteret* graf $G = (V, E)$ er flg. ækvivalent (gælder det ene, gælder det andet):

- G er et træ (dvs. sammenhængende og acyklisk).
- G er sammenhængende, men er det ikke hvis nogen kant fjernes.
- G er sammenhængende og $m = n - 1$.
- G er acyklisk, men er det ikke hvis nogen kant tilføjes.
- G er acyklisk og $m = n - 1$.
- Mellem alle par af knuder er der præcis én vej.



(a) (b) (c)

Bevis (ikke pensum): se appendix B.5.

Læs (pensum) appendix B.4 og B.5 for basale definitioner for grafer.

Minimum Spanning Tree (MST)

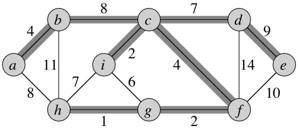
Udspændende træ for sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ. NB: *samme* knudemængde V.

Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for sammenhængende graf $G = (V, E)$:

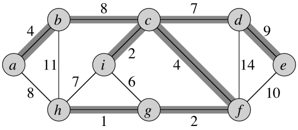
En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ. NB: *samme* knudemængde V.



Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ. NB: *samme* knudemængde V.

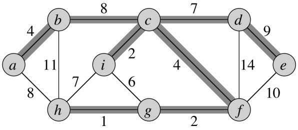


Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ. NB: *samme* knudemængde V.



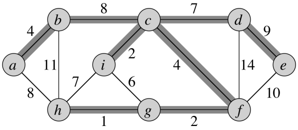
Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

Minimum udSpændende Træ (MST) for en *vægtet* sammenhængende graf G: et udspændende træ for G som har mindst mulig sum af kantvægte (intet udspændende træ har mindre sum).

Minimum Spanning Tree (MST)

Udspændende træ for sammenhængende graf $G = (V, E)$:

En delgraf $T = (V, E')$, $E' \subseteq E$, som er et træ. NB: *samme* knudemængde V.



Iflg. sætning ovenfor har alle udspændende træer samme antal kanter ($m = n - 1$).

Minimum udSpændende Træ (MST) for en *vægtet* sammenhængende graf G: et udspændende træ for G som har mindst mulig sum af kantvægte (intet udspændende træ har mindre sum).

Motivation: forbind punkter i et forsyningsnetværk (elektricitet, olie,...) billigst muligt. Kant i G: mulig forbindelse, vægt: pris for at etablere forbindelse. Dette var motivationen for den første algoritme for problemet (Borůvka, 1926, Østrig-Ungarn, nu Tjekkiet).

Algoritmer for MST

Grundidé (grådig algoritme): Byg MST ved at vælge kanterne én efter én. Vedligehold følgende Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

Algoritmer for MST

Grundidé (grådig algoritme): Byg MST ved at vælge kanterne én efter én. Vedligehold følgende Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

Safe kant for A: kant som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

Algoritmer for MST

Grundidé (grådig algoritme): Byg MST ved at vælge kanterne én efter én. Vedligehold følgende Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

GENERIC-MST(G, w)

$A = \emptyset$
while A is not a spanning tree
  find an edge (u, v) that is safe for A
  $A = A \cup \{(u, v)\}$
return A

Safe kant for A: kant som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.

Algoritmer for MST

Grundidé (grådig algoritme): Byg MST ved at vælge kanterne én efter én. Vedligehold følgende Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

GENERIC-MST(G, w)

```
A = ∅
while A is not a spanning tree
    find an edge (u, v) that is safe for A
    A = A ∪ {(u, v)}
return A
```

Safe kant for A: kant som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.
- Vedligeholdelse: Per definition af safe.

Algoritmer for MST

Grundidé (grådig algoritme): Byg MST ved at vælge kanterne én efter én. Vedligehold følgende Invariant: Der findes et MST som indeholder de valgte kanter A.

```
GENERIC-MST(G, w)
  A = ∅
  while A is not a spanning tree
      find an edge (u, v) that is safe for A
      A = A ∪ {(u, v)}
  return A
```

Safe kant for A: kant som kan tilføjes uden at ødelægge invarianten (mindst én må findes når invarianten gælder og $|A| < n - 1$).

- Initialisering: Enhver sammenhængende graf har et mindst ét ST (via sætningen fra B.5, punkt 2 - fjern kanter til betingelsen nås), og har derfor et MST. Dette indeholder kantmængden $\emptyset$.
- Vedligeholdelse: Per definition af safe.
- Terminering: ethvert (M)ST indeholder præcis $n - 1$ kanter. Da A vokser med én kant per iteration, giver invarianten at algoritmen terminerer, og at A da er et MST (A er indeholdt i et MST, og har samme antal kanter som dette, er derfor lig dette).

Cuts

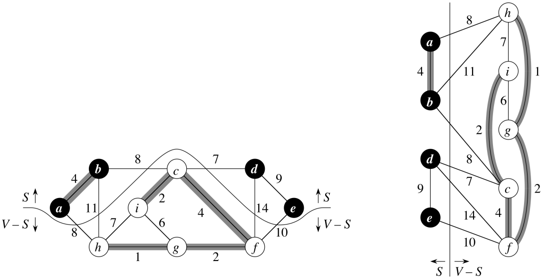
Hvordan finde en safe kant?

Cuts

Hvordan finde en safe kant?

Cut: En delmængde $S \subseteq$ af knuderne.

Kan ses som en to-deling af knuderne i to mængder S og $V - S$.



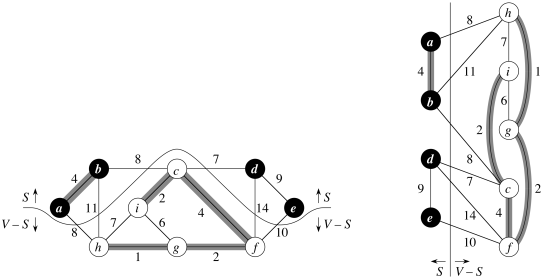
(a) (b)

Cuts

Hvordan finde en safe kant?

Cut: En delmængde $S \subseteq$ af knuderne.

Kan ses som en to-deling af knuderne i to mængder S og $V - S$.



(a) (b)

Kant henover cut: en kant i $S \times (V - S)$.

Cut-sætning

Sætning:

Hvis

- der eksisterer et MST som indeholder A,
- S er et cut som A ikke har kanter henover,
- e er en letteste kant blandt kanterne henover cuttet,

så

- er e safe for A (dvs. der der eksisterer et MST som indeholder $A \cup \{e\}$).

Cut-sætning

Bevis:

- Der findes et MST T som indeholder A.
- Vi skal lave et MST T' som indeholder $A \cup \{e\}$.

Cut-sætning

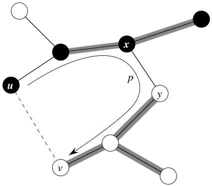
Bevis:

- Der findes et MST T som indeholder A.
- Vi skal lave et MST T' som indeholder $A \cup \{e\}$.

Lad $e = (u, v)$ være en letteste kant henover cuttet S.

Da T er sammenhængdende, må der være en sti i T mellem u og v, hvorpå der er mindst én kant (x, y) henover cuttet S.

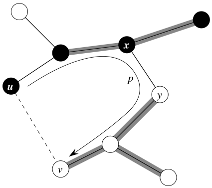
Lad T' være T med (x, y) udskiftet til $e = (u, v)$:



(Kanter $= T$, fede kanter $= A$, cut er angivet med knudefarver.)

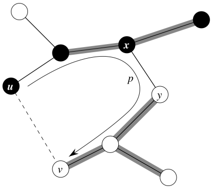
Cut-sætning

Lad T' være T med (x, y) udskiftet til $e = (u, v)$:



Cut-sætning

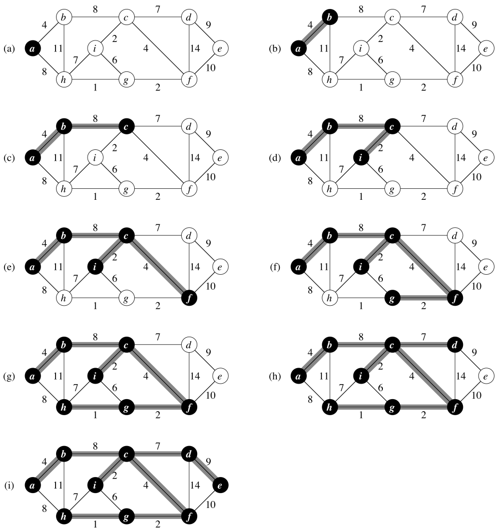
Lad T' være T med (x, y) udskiftet til $e = (u, v)$:



Som T er T' stadig sammenhængende (i alle stier kan (x, y) erstattes af resten af stien fra u til v, samt kanten (u, v)), og har n knuder og $n - 1$ kanter. Det er derfor et træ (pga. sætning tidligere). Det kan kun være lettere end T. Det indeholder $A \cup \{e\}$ (da fjernede kant (x, y) ikke er i A).

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.



Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med $S =$ alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid:

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: n INSERT, n EXTRACTMIN, m DECREASEKEY

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med S = alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: n INSERT, n EXTRACTMIN, m DECREASEKEY på prioritetskø af størrelse $O(n)$,

Prim-Jarnik MST-algoritmen (Prim 1957, Jarnik 1930)

A er ét træ. Bruger cut-sætningen med $S =$ alle knuder i A.

Invariant: En knude $v \in V - S$ opbevarer information om sin korteste kant henover cut i v.key og $v.\pi$.

$V - S$ opbevares i en (min-)prioritetskø.

```
PRIM(G, w, r)
  Q = ∅
  for each u ∈ G.V
      u.key = ∞
      u.π = NIL
      INSERT(Q, u)
  DECREASE-KEY(Q, r, 0)      // r.key = 0
  while Q ≠ ∅
      u = EXTRACT-MIN(Q)
      for each v ∈ G.Adj[u]
          if v ∈ Q and w(u, v) < v.key
              v.π = u
              DECREASE-KEY(Q, v, w(u, v))
```

Korrekthed: via cut-sætningen og invarianten.

Køretid: n INSERT, n EXTRACTMIN, m DECREASEKEY på prioritetskø af størrelse $O(n)$, i alt $O(m \log n)$.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

A er en skov. Bruger cut-sætningen med $S =$ knuderne i et af træerne i A.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

A er en skov. Bruger cut-sætningen med $S =$ knuderne i et af træerne i A.

Forsøger at tilføje kanter til A i letteste-først-orden.

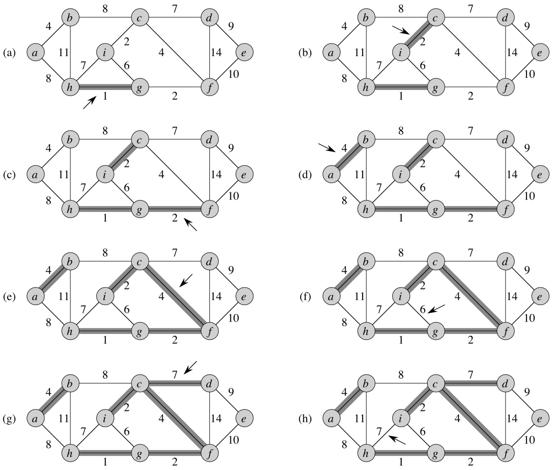
Kruskal MST-algoritmen (1956)

A er en skov. Bruger cut-sætningen med $S =$ knuderne i et af træerne i A.

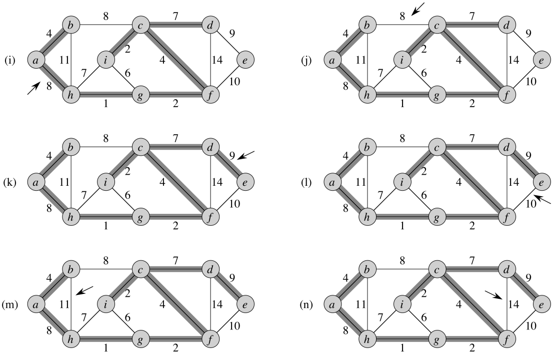
Forsøger at tilføje kanter til A i letteste-først-orden.

Tilføjer kun kant (u, v) til A hvis der ikke laves en kreds, dvs. hvis u og v ligger i forskellige træer. Hvis (u, v) tilføjes, vil disse to træer blive til ét bagefter.

Kruskal MST-algoritmen (1956)



Kruskal MST-algoritmen (1956)



Kruskal MST-algoritmen (1956)

Vedligeholder opdelingen i træer i A ved hjælp af en *disjoint-set* datastruktur på V:

$$\textsc{Make-Set}(x),\ \textsc{Union}(x, y)\ \textsc{Find-Set}(x)$$

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Vedligeholder opdelingen i træer i A ved hjælp af en *disjoint-set* datastruktur på V:

$$\textsc{Make-Set}(x),\ \textsc{Union}(x,y)\ \textsc{Find-Set}(x)$$

Mere præcist:

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Fra tidligere kendes:

Der findes en datastruktur for disjoint-sets hvor

- n $\textsc{Make-Set}(x)$
- $n-1$ $\textsc{Union}(x, y)$
- m $\textsc{Find-Set}(x)$

tager i alt $O(m + n \log n)$ tid.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Kruskal MST-algoritmen (1956)

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Invariant for enhver **for**-løkke som ovenfor (uanset kanternes orden):

Lad E' være de hidtil undersøgte kanter i **for**-løkken.

1. u og v ligger i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen $\Rightarrow$ der er en sti mellem v og u af kanter i A.
2. Alle kanter i E' har begge sine endepunkter i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Invariant for enhver **for**-løkke som ovenfor (uanset kanternes orden):

Lad E' være de hidtil undersøgte kanter i **for**-løkken.

1. u og v ligger i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen $\Rightarrow$ der er en sti mellem v og u af kanter i A.
2. Alle kanter i E' har begge sine endepunkter i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen.

Bevis: nemt via induktion på $|E'|$.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

```
KRUSKAL(G, w)
  A = ∅
  for each vertex v ∈ G.V
      MAKE-SET(v)
  sort the edges of G.E into nondecreasing order by weight w
  for each (u, v) taken from the sorted list
      if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          A = A ∪ {(u, v)}
          UNION(u, v)
  return A
```

Invariant for enhver **for**-løkke som ovenfor (uanset kanternes orden):

Lad E' være de hidtil undersøgte kanter i **for**-løkken.

1. u og v ligger i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen $\Rightarrow$ der er en sti mellem v og u af kanter i A.
2. Alle kanter i E' har begge sine endepunkter i samme mængde i Disjoint-Set datastrukturen.

Bevis: nemt via induktion på $|E'|$.

Af 1) og 2) følger 3): Mængderne i Disjoint-Set datastrukturen er præcis sammenhængskomponenterne i grafen (V, E').

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Korrekthed:

Når algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A ser vi på cuttet givet ved knudemængden $\textsc{Find-Set}(u)$). Del 2) af invarianten viser at A ikke har kanter hen over dette cut, da $A \subseteq E'$. Algoritmens sortering af kanterne viser sammen med del 2) af invarianten at (u, v) er en letteste kant henover dette cut. Derfor kan cutsætningen bruges, og A ligger derfor hele tiden inde i et MST.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Korrekthed:

Når algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A ser vi på cuttet givet ved knudemængden $\textsc{Find-Set}(u)$). Del 2) af invarianten viser at A ikke har kanter hen over dette cut, da $A \subseteq E'$. Algoritmens sortering af kanterne viser sammen med del 2) af invarianten at (u, v) er en letteste kant henover dette cut. Derfor kan cutsætningen bruges, og A ligger derfor hele tiden inde i et MST.

Når algoritmen stopper, er $E' = E$. Da den oprindelige graf (V, E) er sammenhængende, giver 3) at der én mængde i Disjoint-Set datastrukturen. Derfor er der lavet præcis $n - 1$ unions, og dermed er $|A| = n - 1$. Så A er selv dette MST.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Korrekthed:

Når algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A ser vi på cuttet givet ved knudemængden $\textsc{Find-Set}(u)$). Del 2) af invarianten viser at A ikke har kanter hen over dette cut, da $A \subseteq E'$. Algoritmens sortering af kanterne viser sammen med del 2) af invarianten at (u, v) er en letteste kant henover dette cut. Derfor kan cutsætningen bruges, og A ligger derfor hele tiden inde i et MST.

Når algoritmen stopper, er $E' = E$. Da den oprindelige graf (V, E) er sammenhængende, giver 3) at der én mængde i Disjoint-Set datastrukturen. Derfor er der lavet præcis $n - 1$ unions, og dermed er $|A| = n - 1$. Så A er selv dette MST.

Køretid:

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Korrekthed:

Når algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A ser vi på cuttet givet ved knudemængden $\textsc{Find-Set}(u))$. Del 2) af invarianten viser at A ikke har kanter hen over dette cut, da $A \subseteq E'$. Algoritmens sortering af kanterne viser sammen med del 2) af invarianten at (u, v) er en letteste kant henover dette cut. Derfor kan cutsætningen bruges, og A ligger derfor hele tiden inde i et MST.

Når algoritmen stopper, er $E' = E$. Da den oprindelige graf (V, E) er sammenhængende, giver 3) at der én mængde i Disjoint-Set datastrukturen. Derfor er der lavet præcis $n - 1$ unions, og dermed er $|A| = n - 1$. Så A er selv dette MST.

Køretid:

Sortér m kanter, lav n $\textsc{Make-Set}$, $n - 1$ $\textsc{Union}$, m $\textsc{Find-Set}$.

Kruskal MST-algoritmen (1956)

Korrekthed:

Når algoritmen tilføjer en kant (u, v) til A ser vi på cuttet givet ved knudemængden $\textsc{Find-Set}(u)$). Del 2) af invarianten viser at A ikke har kanter hen over dette cut, da $A \subseteq E'$. Algoritmens sortering af kanterne viser sammen med del 2) af invarianten at (u, v) er en letteste kant henover dette cut. Derfor kan cutsætningen bruges, og A ligger derfor hele tiden inde i et MST.

Når algoritmen stopper, er $E' = E$. Da den oprindelige graf (V, E) er sammenhængende, giver 3) at der én mængde i Disjoint-Set datastrukturen. Derfor er der lavet præcis $n - 1$ unions, og dermed er $|A| = n - 1$. Så A er selv dette MST.

Køretid:

Sortér m kanter, lav n $\textsc{Make-Set}$, $n - 1$ $\textsc{Union}$, m $\textsc{Find-Set}$.

I alt $O(m \log m)$ [eftersom $m \geq n - 1$, da grafen er sammenhængende].