Sortering

Sortering

Input: n tal
Output: De n tal i sorteret orden

Eksempel:

$$6, 2, 9, 4, 5, 1, 4, 3 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 9$$

Mange opgaver er hurtigere i sorteret information (tænk på ordbøger, telefonbøger, adresselister i telefoner,...). Dette gælder både for mennesker og for computere. Sortering er ofte en byggesten i algoritmer for andre problemer.

Sortering af information er en fundamental og central opgave.

Mange algoritmer er udviklet: Insertionsort, Selectionsort, Bubblesort, Mergesort, Quicksort, Heapsort, Radixsort, Countingsort, ...

Vi skal møde alle ovenstående i dette kursus.

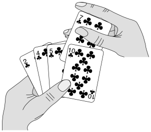
Sortering

Kommentarer:

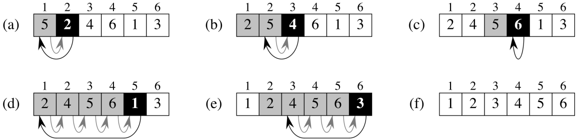
- Sorteret orden kan være stigende eller faldende. Vi vil i dette kursus altid bruge stigende (mere præcist: ikke-faldende). Skal man sortere faldende, skal alle sammenligninger bare vendes.
- Man sorterer ofte elementer sammensat af en sorteringsnøgle samt yderligere information. Sorteringsnøglen kan være et tal, eller andet der kan sammenlignes (f.eks. strenge/ord). Vi viser i dette kursus blot elementer som rene tal.
- Vi vil antage at input ligger i et array. Mange sorteringsalgoritmer vil også kunne implementeres når input er en lænket liste.

Insertionsort

Bruges af mange når man sorterer en hånd i kort:



Samme idé udført på tal i et array:

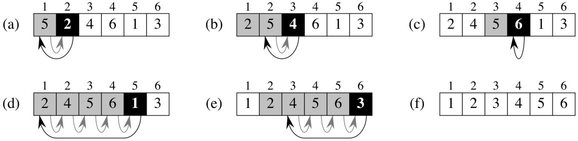


Argument for korrekthed: Del af array til venstre for sorte felt er altid sorteret. Denne del udvides med én hele tiden ($\Rightarrow$ algoritmen stopper, med alle elementer sorteret).

Insertionsort

Som pseudo-kode:

```
INSERTION-SORT(A, n)
  for j = 2 to n
      key = A[j]
      // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
      i = j − 1
      while i > 0 and A[i] > key
          A[i + 1] = A[i]
          i = i − 1
      A[i + 1] = key
```



Køretid for Insertionsort

Analyse:

INSERTION-SORT(A, n)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** n	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i = j - 1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

Her er t_j hvor mange gange testen i den indre **while**-løkke udføres (dvs. $t_j - 1$ er hvor mange gange løkken kører, hvilket er hvor mange elementer det j'te element skal forbi under indsættelsen).

Best case: $t_j = 1$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n$.

Worst case: $t_j = j$ for alle j. Samlet tid $\leq c \cdot n^2$, da

$$\sum_{j=1}^{n} j = (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} \leq \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Selectionsort

En anden simpel og naturlig sorteringsalgoritme:

IndListe = input
UdListe = tom liste
While IndListe ikke tom:
    find mindste element x i IndListe
    flyt x fra IndListe til enden af UdListe

Klart korrekt.

Køretid?

I alt n gange findes mindste element i IndListe. Simpel metode er lineær søgning $\Rightarrow$ tid $\leq c \cdot (n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) \leq c \cdot n^2$.

Merge

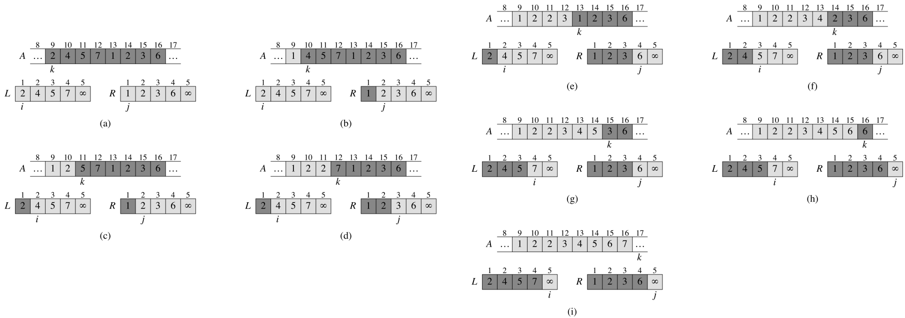
Input: To *sorterede* rækker 2,4,5,7 1,2,3,6

Output: De samme elementer i én sorteret række 1,2,2,3,4,5,6,7

Vi kan naturligvis sortere. Men hurtigere at flette (merge):

Repeat:

Flyt det mindste af de to forreste elementer



Tid: $\leq c \cdot n$, hvor $n =$ antal elementer i alt.

Korrekthed: Merge kan ses som en udgave af Selectionsort.

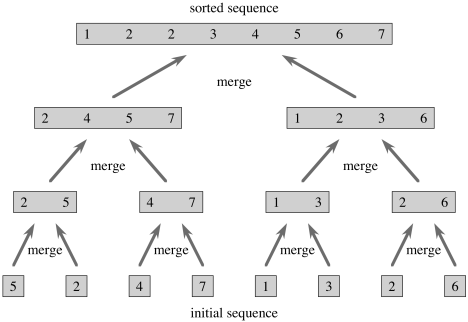
Merge

Som pseudo-kode, med to rækker $A[p \ldots q]$ and $A[q+1 \ldots r]$:

```
MERGE(A, p, q, r)
  n1 = q - p + 1
  n2 = r - q
  let L[1..n1 + 1] and R[1..n2 + 1] be new arrays
  for i = 1 to n1
      L[i] = A[p + i - 1]
  for j = 1 to n2
      R[j] = A[q + j]
  L[n1 + 1] = ∞
  R[n2 + 1] = ∞
  i = 1
  j = 1
  for k = p to r
      if L[i] ≤ R[j]
          A[k] = L[i]
          i = i + 1
      else A[k] = R[j]
          j = j + 1
```

Mergesort

Mergesort: opbyg længere og længere sorterede dele af input ved gentagen brug af merge:

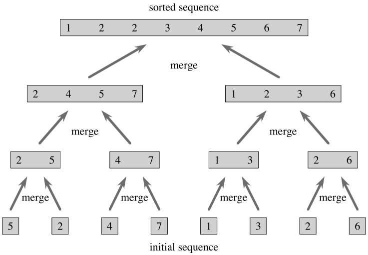


Tid: Hver merge bruger højst $c \cdot n_1$ tid, hvor n_1 er antal elementer der merges. Så alle merge-operationer i ét lag bruger tilsammen højst $c \cdot (n_1 + n_2 + \dots) = c \cdot n$. Dette gælder alle lagene. Der er i alt $\log_2 n$ lag, så den samlede tid er højst $c \cdot n \cdot \log_2 n$.

Mergesort

Hvorfor er der $\log_2 n$ merge-lag?

Antal sorterede lister efter k merge-lag (antag n er en potens af 2):



Antal lister	k
$\vdots$	$\vdots$
$n/2^k$	k
$\vdots$	$\vdots$
$n/2^3$	3
$n/2^2$	2
$n/2$	1
n	0

Algoritmen stopper når der er én sorteret liste:

$$n/2^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n = 2^k \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 n = k$$

Mergesort

Hvis n ikke er en potens af 2?

Algoritmen merger i hvert lag så mange par, den kan, og der bliver evt. én liste som ikke merges (denne er med som liste på næste lag).

F.eks. bliver 12 lister bliver til 6 lister mens 13 $(= 12 + 1)$ lister til 7 $(= 6 + 1)$ lister.

Generelt: Hvis der er x lister før et merge-lag, er der $\lceil x/2 \rceil$ lister efter.

Se på to input størrelse n_1 og n_2, med $n_1 \leq n_2$. Da $\lceil x/2 \rceil$ er en voksende funktion af x, kan antallet af lister i hvert lag ikke være mindre for n_2 end for n_1. Derfor kan antallet af merge-lag (før algoritmen når ned på én liste) ikke være mindre for n_2 end for n_1.

Sæt n_2 til mindste potens af to, som er $\geq n_1$. Som set tidligere er der præcis $\log_2 n_2$ merge-lag for n_2, og dermed højst så mange merge-lag for n_1.

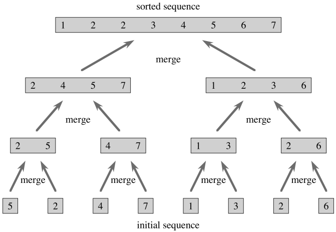
Så der er $\lceil \log_2 n \rceil$ merge lag for generelt n.

n	7	$8 = 2^3$	9	10	11	12	13	14	15	$16 = 2^4$	17
$\log_2(n)$	2.807	3	3.169	3.321	3.459	3.584	3.700	3.807	3.906	4	4.087
Antal lag	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5

Mergesort

Mergesort som pseudo-kode, i en variant formuleret med rekursion:

```
MERGE-SORT(A, p, r)
 if p < r                          // check for base case
     q = ⌊(p + r)/2⌋               // divide
     MERGE-SORT(A, p, q)           // conquer
     MERGE-SORT(A, q + 1, r)       // conquer
     MERGE(A, p, q, r)             // combine
```



Et kald $\textsc{Merge-Sort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \ldots r]$ i sorteret orden. Første kald er $\textsc{Merge-Sort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

Quicksort

Mergesort:

- Del input op i to dele X og Y (trivielt)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Bland de to sorterede dele til én sorteret del (reelt arbejde)

Basistilfælde: $n \leq 1$

Quicksort:

- Del input op i to dele X og Y så $X \leq Y$ (reelt arbejde)
- Sorter hver del for sig (rekursion)
- Returner X efterfulgt af Y (trivielt)

Basistilfælde: $n \leq 1$

[Hoare, 1960]

Quicksort

Som pseudo-kode:

$$
\begin{array}{l}
\textsc{Quicksort}(A, p, r) \\
\quad \textbf{if } p < r \\
\qquad q = \textsc{Partition}(A, p, r) \\
\qquad \textsc{Quicksort}(A, p, q-1) \\
\qquad \textsc{Quicksort}(A, q+1, r)
\end{array}
$$

Et kald $\textsc{Quicksort}(A,p,r)$ har til opgave at stille elementerne i $A[p \ldots r]$ i sorteret orden. Første kald er $\textsc{Quicksort}(A,1,n)$, som har til opgave at sortere hele A.

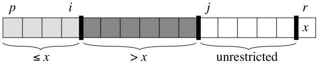
Et kald $\textsc{Partition}(A,p,r)$ vælger et element $x \in A$ og opdeler $A[p \ldots r]$ således at:

- $A[q] = x$
- $A[p \ldots q-1] \leq x$
- $A[q+1 \ldots r] > x$

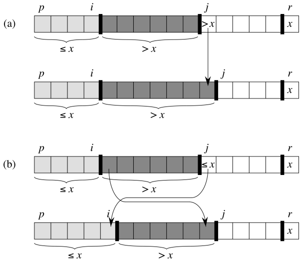
Partition

Hvordan lave PARTITION?

Vælg et element x fra input at opdele efter (her sidste element i array-del). Opbyg de to dele under et gennemløb af array ud fra flg. princip:

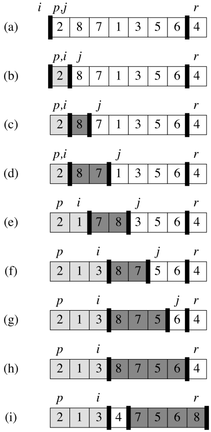


Hvordan tage et skridt under gennemløb?



Partition

Et eksempel på gennemløb:

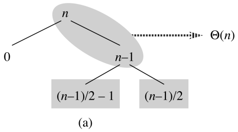


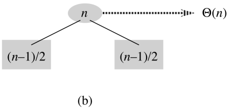
Tid: $O(n)$.

Quicksort køretid

Hænger på, hvordan partitions gennem rekursionen deler input.

To ekstremer:





- Hvis alle partitions er helt balancerede: $O(n \log n)$ (ca. samme analyse som for Mergesort).
- Hvis alle partitions er helt ubalancerede: $O(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1) = O(n^2)$.

Man kan vise at dette er henholdsvis best case og worst case for Quicksort.

Quicksort køretid

- I praksis: $O(n \log n)$ for næsten alle input.
- Dog: sorteret input giver $\Theta(n^2)$ for ovenstående valg af opdelingselement x i partition (brug *ikke* det valg i praksis).
- Mere robuste valg opdelingselement x: enten som midterelementet, som medianen af flere elementer, som et tilfældigt element, eller som medianen af flere tilfældigt valgte elementer.
- Quicksort er *inplace*: bruger ikke mere plads end input-array'et.
- Kode er meget effektiv i praksis. En godt implementeret Quicksort er ofte bedste all-round sorteringsalgoritme (og valgt i mange biblioteker, f.eks. Java og C++/STL).

Heapsort

En Heap er:

1. et binært træ
2. med heap-orden
3. og heap-facon
4. udlagt i et array

(Note: “heap” bruges også om et hukommelsesområde brugt til allokering af objekter under et programs udførsel. De to anvendelser er urelaterede.)

[Williams, 1964]

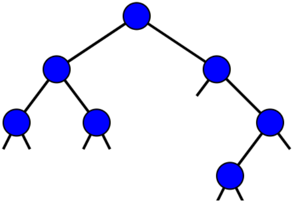
1) Binært træ

Et binært træ er enten

- det tomme træ

eller

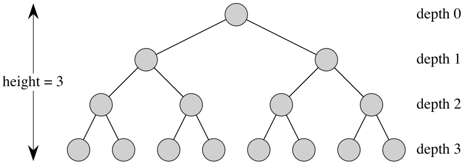
- en knude *v* (evt. med indhold af data) samt to undertræer (et højre og et venstre).



Knuden *v* kaldes også rod for træet. Roden af et (ikke-tomt) undertræ af *v* kaldes for et barn af *v*, og *v* kaldes dennes forælder. Hvis begge *v*'s undetræer er tomme, kaldes *v* et blad.

1) Binært træ

- Dybde af knude = antal kanter til rod
- Højde af knude = max antal kanter til blad
- Højde af træ = højde af dets rod
- Fuldt (complete) binært træ = træ med alle blade i samme dybde.



Et fuldt binært træ af højde h har

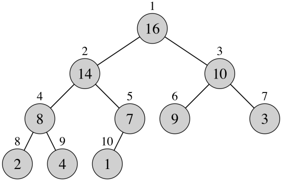
$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^h = \sum_{i=0}^{h} 2^i = 2^{h+1} - 1$$

knuder (formel A.5 side 1147), heraf 2^h blade.

2) Heaporden

Et binært træ med nøgler i alle knuder er max-heapordnet hvis det for alle par af knuder v og u, hvor v er forældre til u, gælder

$$\text{nøgle i } v \geq \text{nøgle i } u$$



(a)

NB: dubletter er tilladt (ikke vist).

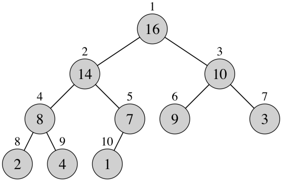
Specielt gælder at roden indeholder den største nøgle i hele heapen.

Det er min-heapordnet hvis der gælder

$$\text{nøgle i } v \leq \text{nøgle i } u$$

3) Heapfacon

Et binært træ har heapfacon hvis alle lag i træet er helt fyldte, undtagen det sidste lag, hvor alle knuder findes længst til venstre. (Specielt har et fuldt træ heapfacon).



(a)

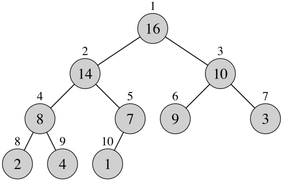
For et træ af heapfacon af højde h med n knuder:

$$n > \text{antal knuder i fuldt træ af højde } h-1 = 2^h - 1$$

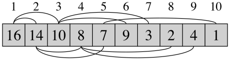
$$n > 2^h - 1 \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 2^h \quad \Leftrightarrow \quad \log_2(n+1) > h$$

4) Heap udlagt i et array

Et binært træ i heapfacon kan naturligt udlægges i et array ved at tildele array-indekser til knuder ved et top-down, venstre-til-højre gennemløb af træets lag:



(a)



(b)

Navigering mellem børn og forældre i array-versionen kan udføres ved simple beregninger: Knuden på plads i har

- Forælder på plads $\lfloor i/2 \rfloor$
- Børn på plads $2i$ og $2i + 1$

(Se figur ovenfor. Formelt bevis til eksaminatorier.)

Operationer på en heap

Vi ønsker at lave følgende operationer på en heap:

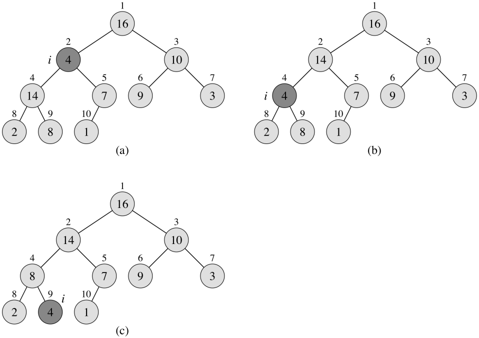
- MAX-HEAPIFY: Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens undertræ til at overholde heap-orden.
- BUILD-MAX-HEAP: Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

Navnene ovenfor er for en max-heap. For en min-heap findes de samme operationer (med "min-" i stedet for "max-" i navnet).

Max-Heapify

Givet en knude med to undertræer, som hver især overholder heap-orden, få hele knudens træ til at overholde heap-orden.

- Problem: knudens nøgle kan være mindre end en af sine børns nøgler.
- Løsning: byt nøgle med barnet med den største nøgle, kør derefter MAX-HEAPIFY på dette barn.

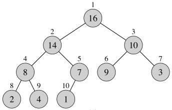


Tid: O(højde af knude).

Max-Heapify

Som pseudo-kode (med indarbejdet check for at man ikke kigger "for langt" i arrayet, dvs. længere end plads n):

```
MAX-HEAPIFY(A, i, n)
  l = LEFT(i)
  r = RIGHT(i)
  if l ≤ n and A[l] > A[i]
      largest = l
  else largest = i
  if r ≤ n and A[r] > A[largest]
      largest = r
  if largest ≠ i
      exchange A[i] with A[largest]
      MAX-HEAPIFY(A, largest, n)
```

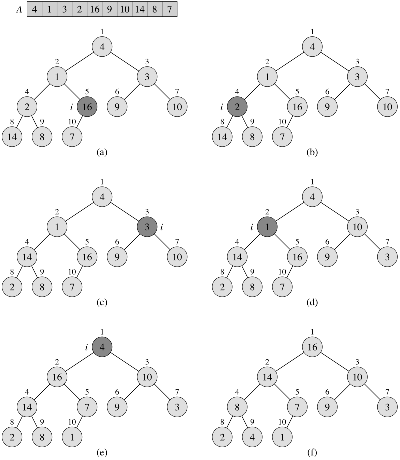


(a)

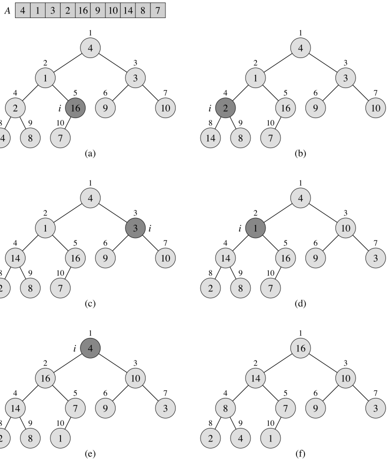
Build-Heap

Lav n input elementer (uordnede) til en heap.

- Ide: arranger elementerne i heap-facon, bring derefter træet i heap-orden nedefra og op.
- Observation: et træ af størrelse én overholder altid heaporder.



Build-Heap



Tid: $O(n \log_2 n)$ klart. Bedre analyse giver $O(n)$.

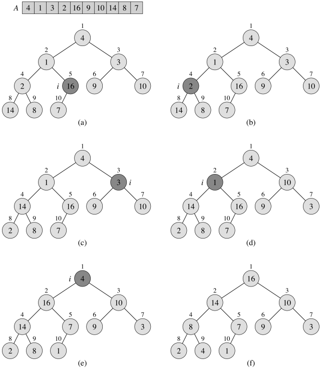
Build-Heap

Som pseudo-kode:

BUILD-MAX-HEAP(A, n)

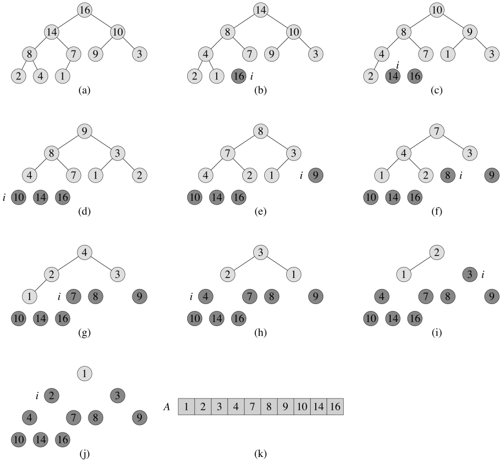
for $i = \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1

  MAX-HEAPIFY(A, i, n)



Heapsort

Byg en heap. Gentag: fjern rod (største element i heap), sæt sidste element op som rod, kald MAX-HEAPIFY.



Heapsort

Som pseudo-kode:

```
HEAPSORT(A, n)
  BUILD-MAX-HEAP(A, n)
  for i = n downto 2
      exchange A[1] with A[i]
      MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Tid: $O(n) + O(n \log n) = O(n \log n)$

Tre $n \log n$ sorteringsalgoritmer

	Worstcase	Inplace
QuickSort		$\surd$
MergeSort	$\surd$	
HeapSort	$\surd$	$\surd$

Heapsort kører dog langsommere end Mergesort og Quicksort pga. ineffektiv brug af hukommelse (random access).

Introsort [Musser, 1997]: brug Quicksort, men skift under rekursionen til heapsort hvis rekursionen bliver for dyb. Dette giver en inplace, worst case $O(n \log n)$ algoritme, med god køretid i praksis (dette er sorteringsalgoritmen i standardbiblioteket STL for C++).