

# Dynamisk programmering

## Flere eksempler

# Eksempel 1: Længste fælles delsekvens

Alfabet = mængde af tegn:

$\{a,b,c,\dots,z\}$ ,  $\{A,C,G,T\}$ ,  $\{0,1\}$

# Eksempel 1: Længste fælles delsekvens

**Alfabet** = mængde af tegn:

$\{a,b,c,\dots,z\}$ ,  $\{A,C,G,T\}$ ,  $\{0,1\}$

**Streng** = sekvens  $x_1x_2x_3\dots x_n$  af tegn fra et alfabet:

helloworld

GATAAATCTGGTCTTATTTCC

00101100101010001111

# Eksempel 1: Længste fælles delsekvens

**Alfabet** = mængde af tegn:

$\{a,b,c,\dots,z\}$ ,  $\{A,C,G,T\}$ ,  $\{0,1\}$

**Streng** = sekvens  $x_1x_2x_3\dots x_n$  af tegn fra et alfabet:

helloworld

GATAAATCTGGTCTTATTTCC

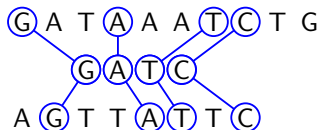
00101100101010001111

**Delsekvens** = delmængde af tegnene i streng, i uændret rækkefølge:

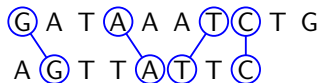


# Længste fælles delsekvens

Fælles delsekvens for to strenge:

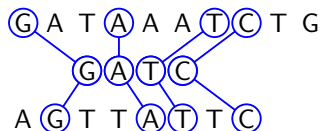


Eller blot:

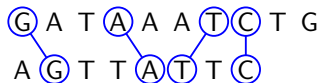


# Længste fælles delsekvens

Fælles delsekvens for to strenge:



Eller blot:



Længste fælles delsekvens (Longest Common Subsequence, LCS):

Givet to strenge

$$X = x_1x_2x_3 \dots x_m$$

$$Y = y_1y_2y_3 \dots y_n$$

af længde  $m$  og  $n$ , find en **længste** fælles delsekvens for dem.

Længden af denne kan ses som et mål for similaritet mellem strenge (f.eks. dna-strenge).

# Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor mindre problemstørrelser:

# Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor mindre problemstørrelser:

- ▶  $X_i = x_1x_2x_3 \dots x_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .
- ▶  $Y_j = y_1y_2y_3 \dots y_j$  for  $1 \leq j \leq n$ .
- ▶  $X_0$  og  $Y_0$  er den tomme streng.
- ▶  $\text{lcs}(i,j)$  er **længden** af længste fælles delsekvens af  $X_i$  og  $Y_j$ .



# Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor mindre problemstørrelser:

- ▶  $X_i = x_1x_2x_3 \dots x_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .
- ▶  $Y_j = y_1y_2y_3 \dots y_j$  for  $1 \leq j \leq n$ .
- ▶  $X_0$  og  $Y_0$  er den tomme streng.
- ▶  $\text{lcs}(i,j)$  er **længden** af længste fælles delsekvens af  $X_i$  og  $Y_j$ .

Vi vil gerne finde  $\text{lcs}(m, n)$ .

# Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor mindre problemstørrelser:

- ▶  $X_i = x_1x_2x_3 \dots x_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .
- ▶  $Y_j = y_1y_2y_3 \dots y_j$  for  $1 \leq j \leq n$ .
- ▶  $X_0$  og  $Y_0$  er den tomme streng.
- ▶  $\text{lcs}(i,j)$  er **længden** af længste fælles delsekvens af  $X_i$  og  $Y_j$ .

Vi vil gerne finde  $\text{lcs}(m, n)$ .

Mere generelt: Vi søger en rekursiv formel for  $\text{lcs}(i, j)$ .

# Rekursiv løsning?

Vi vil arbejde på at lave en rekursiv løsning. Vi definerer derfor mindre problemstørrelser:

- ▶  $X_i = x_1x_2x_3 \dots x_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .
- ▶  $Y_j = y_1y_2y_3 \dots y_j$  for  $1 \leq j \leq n$ .
- ▶  $X_0$  og  $Y_0$  er den tomme streng.
- ▶  $\text{lcs}(i,j)$  er **længden** af længste fælles delsekvens af  $X_i$  og  $Y_j$ .

Vi vil gerne finde  $\text{lcs}(m, n)$ .

Mere generelt: Vi søger en rekursiv formel for  $\text{lcs}(i, j)$ .

Basistilfælde: Det er klart at  $\text{lcs}(0, j) = \text{lcs}(i, 0) = 0$ .

# Optimale delproblemer I

Formel for  $\text{lcs}(i, j)$ :

Case I:  $x_i = y_j$

Observation: en fælles delsekvens  $Z$  for  $X_i$  og  $Y_j$  består af

- ▶ Et sidste tegn  $z_k$ .
- ▶ En streng  $Z' = z_1 z_2 z_3 \dots z_{k-1}$ , som må være en fælles delsekvens af  $X_{i-1}$  og  $Y_{j-1}$  (tegnene i  $Z$  skal komme i samme rækkefølge som i  $X$  og  $Y$ , så kun sidste tegn i  $Z$  har mulighed for at være  $x_i$  og  $y_j$ ).

# Optimale delproblemer I

Formel for  $\text{lcs}(i, j)$ :

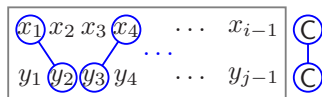
Case I:  $x_i = y_j$

Observation: en fælles delsekvens  $Z$  for  $X_i$  og  $Y_j$  består af

- ▶ Et sidste tegn  $z_k$ .
- ▶ En streng  $Z' = z_1 z_2 z_3 \dots z_{k-1}$ , som må være en fælles delsekvens af  $X_{i-1}$  og  $Y_{j-1}$  (tegnene i  $Z$  skal komme i samme rækkefølge som i  $X$  og  $Y$ , så kun sidste tegn i  $Z$  har mulighed for at være  $x_i$  og  $y_j$ ).

Den essentielle egenskab (optimale delproblemer) for Case I:

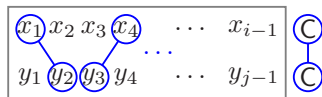
Hvis  $Z$  er en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ , må  $Z'$  være en længste fælles delsekvens af  $X_{i-1}$  og  $Y_{j-1}$ . For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for  $X_{i-1}$  og  $Y_{j-1}$ , kunne den tilføjes tegnet  $x_i (= y_j)$  og blive en længere fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ .



# Optimale delproblemer I

Af den essentielle egenskab haves i Case I ( $x_i = y_j$ ):

- ▶  $\text{lcs}(i, j) = \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1$
- ▶ En længste fælles delsekvens for  $X_{i-1}$  og  $Y_{j-1}$  tilføjet tegnet  $x_i$  ( $= y_j$ ) er en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ .



## Optimale delproblemer II

Formel for  $\text{lcs}(i, j)$ :

Case II:  $x_i \neq y_j$

Observation: en fælles delsekvens  $Z = z_1 z_2 z_3 \dots z_k$  for  $X_i$  og  $Y_j$  kan ikke have  $z_k$  værende en parring af  $x_i$  og  $y_j$  (da disse jo er forskellige).

Så  $Z$  må være en fælles delsekvens for *enten*  $X_{i-1}$  og  $Y_j$  *eller* for  $X_i$  og  $Y_{j-1}$  (eller evt. begge).

## Optimale delproblemer II

Formel for  $lcs(i, j)$ :

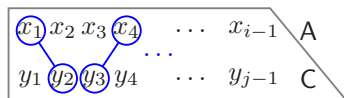
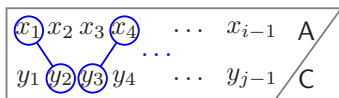
Case II:  $x_i \neq y_j$

Observation: en fælles delsekvens  $Z = z_1 z_2 z_3 \dots z_k$  for  $X_i$  og  $Y_j$  kan ikke have  $z_k$  værende en parring af  $x_i$  og  $y_j$  (da disse jo er forskellige).

Så  $Z$  må være en fælles delsekvens for *enten*  $X_{i-1}$  og  $Y_j$  *eller* for  $X_i$  og  $Y_{j-1}$  (eller evt. begge).

Den essentielle egenskab (optimale delproblemer) for Case II:

Hvis  $Z$  er en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ , må den være en længste fælles delsekvens for enten  $X_{i-1}$  og  $Y_j$  eller for  $X_i$  og  $Y_{j-1}$  (eller evt. begge). For hvis der fandtes en længere fælles delsekvens for enten  $X_{i-1}$  og  $Y_j$  eller for  $X_i$  og  $Y_{j-1}$ , ville denne også være en længere fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ .





## Optimale delproblemer II

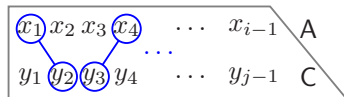
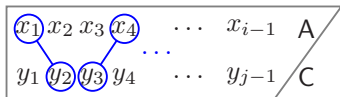
Lad  $T_1$  være en længste fælles delsekvens for  $X_{i-1}$  og  $Y_j$ , og lad  $T_2$  være en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_{j-1}$ .

Af den essentielle egenskab i Case II ( $x_i \neq y_j$ ) haves at blandt  $T_1$  og  $T_2$  er der (mindst) en som er en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ .

Ingen af  $T_1$  og  $T_2$  kan være længere end den længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$  (da de begge er delsekvens af  $X_i$  og  $Y_j$ ).

Så af den essentielle egenskab haves i Case II ( $x_i \neq y_j$ ):

- ▶  $\text{lcs}(i, j) = \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1))$
- ▶ Hvis  $\text{lcs}(i-1, j) \geq \text{lcs}(i, j-1)$ , er en længste fælles delsekvens for  $X_{i-1}$  og  $Y_j$  også en længste fælles delsekvens for  $X_i$  og  $Y_j$ . Et symmetrisk udsagn gælder for " $\leq$ " og  $X_i$  og  $Y_{j-1}$ .



## Rekursiv formel for lcs(i, j)

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for lcs(i, j):

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

## Rekursiv formel for lcs(i, j)

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for lcs(i, j):

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

## Rekursiv formel for lcs(i, j)

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for lcs(i, j):

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

MEN: det er nemt at se at der er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Så samme delproblemer bliver gentagne gange beregnet forskellige steder i rekursionstræet, og køretiden bliver meget dårlig.

## Rekursiv formel for $\text{lcs}(i, j)$

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for  $\text{lcs}(i, j)$ :

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

MEN: det er nemt at se at der er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Så samme delproblemer bliver gentagne gange beregnet forskellige steder i rekursionstræet, og køretiden bliver meget dårlig.

Kan evt. løses med memoization: hav en tabel med plads til svaret på alle de mulige delproblemer  $\text{lcs}(i, j)$ , og gem svaret når det er beregnet første gang. Siden, slå det bare op.

## Rekursiv formel for $\text{lcs}(i, j)$

Alt i alt har vi fundet flg. rekursive formel for  $\text{lcs}(i, j)$ :

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Den giver anledning til en naturlig, simpel rekursiv algoritme.

MEN: det er nemt at se at der er gentagelser blandt delproblemers delproblemer.

Så samme delproblemer bliver gentagne gange beregnet forskellige steder i rekursionstræet, og køretiden bliver meget dårlig.

Kan evt. løses med memoization: hav en tabel med plads til svaret på alle de mulige delproblemer  $\text{lcs}(i, j)$ , og gem svaret når det er beregnet første gang. Siden, slå det bare op.

Dynamisk programmering: udfyld i stedet direkte denne tabel bottom-up på struktureret måde.

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i, j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0							
1							
2							
·							
·							
$m$							

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i, j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						


$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$



# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i, j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						



$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i,j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

$$\text{lcs}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i-1, j-1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i,j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

$$\text{lcs}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i-1, j-1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i,j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

$$\text{lcs}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i-1, j-1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i, j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

The table illustrates the bottom-up construction of the LCS table. The first row (i=0) and the first column (j=0) are filled with 0s and shaded with blue diagonal lines. A red arrow points from the cell (2,2) to (1,1), indicating a match. Blue arrows show the sequence of cells filled: (1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,5), (5,6), (6,6), (6,7), (7,7), (7,8).

$$\text{lcs}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i - 1, j - 1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i - 1, j), \text{lcs}(i, j - 1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Dynamisk programmering

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i,j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						


The table illustrates the bottom-up construction of the LCS table. The first row (i=0) and the first column (j=0) are filled with 0s and shaded with blue diagonal lines. A red arrow points from the cell (2,2) to (1,1), indicating the recursive step. A blue arrow points from the cell (2,2) to (3,3), indicating the next step in the sequence.

$$\text{lcs}(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \text{ or } j = 0 \\ \text{lcs}(i-1, j-1) + 1 & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i = y_j \\ \max(\text{lcs}(i-1, j), \text{lcs}(i, j-1)) & \text{if } i, j > 0 \text{ and } x_i \neq y_j \end{cases}$$

# Køretid

Dynamisk programmering: udfyld tabel over  $\text{lcs}(i, j)$  bottom-up på struktureret måde.

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						



Tabelstørrelse:  $mn$

Udfyld tabelindgang:  $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(1)$ .

Tid i alt:  $O(\text{produktet af de to}) = O(mn)$ .

## Find en konkret løsning

$lcs(m, n)$  er **længden** af en længste fælles delsekvens for  $X = X_m$  og  $Y = Y_n$ .

Hvis vi gerne vil finde en konkret fælles delsekvens af denne længde: Gem for hvert felt i tabellen hvilken af de tre røde pile som gav  $lcs(i, j)$ -værdien i dette felt.

		$j$	0	1	2	3	4	5	6
$i$	$y_j$		B	D	C	A	B	A	
0	$x_i$	0	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	↑	↑	↑	↖	←	↖	
2	B	0	↖	←	←	↑	↖	←	
3	C	0	↑	↑	↖	←	↑	↑	
4	B	0	↖	↑	↑	↑	↖	←	
5	D	0	↑	↖	↑	↑	↖	↑	
6	A	0	↑	↑	↑	↖	↑	↖	
7	B	0	↖	↑	↑	↑	↖	↑	

Følg gemte pile baglæns fra  $lcs(m, n)$ . Når en skrå pil følges er det en Case I, og  $x_i$  ( $=y_j$ ) udskrives. Ellers er den en Case II, og intet udskrives.

I alt udskrives en længste fælles delsekvens for  $X$  og  $Y$  i baglæns orden i tid  $O(m + n)$ .



# Pladsforbrug for LCS

Hvis vi kun skal bruge længden af længste fælles delsekvens, kan vi nøjes med  $\min\{m, n\}$  plads:

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

# Pladsforbrug for LCS

Hvis vi kun skal bruge længden af længste fælles delsekvens, kan vi nøjes med  $\min\{m, n\}$  plads:

$i \backslash j$	0	1	2	·	·	·	$n$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0						
2	0						
·	0						
·	0						
$m$	0						

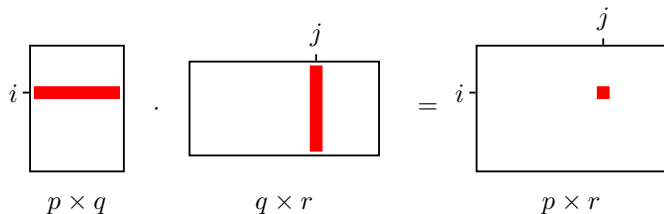
Hvis vi skal bruge en længste fælles delsekvens, må vi gemme hele tabellen, dvs. bruge  $\Theta(m + n)$  plads (da vi ikke kender stien tilbage, må vi gemme hele tabellen):

	$j$	0	1	2	3	4	5	6
$i$	$y_j$		B	D	C	A	B	A
0	$x_j$	0	0	0	0	0	0	0
1	A	0	0	0	0	1	1	1
2	B	0	1	1	1	2	2	2
3	C	0	1	1	1	2	2	2
4	B	0	1	1	2	2	3	3
5	D	0	1	2	2	2	3	3
6	A	0	1	2	2	3	3	4
7	B	0	1	2	2	3	4	4

[Hirschberg gav i 1975 en metode til også at opnå dette med  $\min\{m, n\}$  plads, men det er ikke pensum i DM507.]

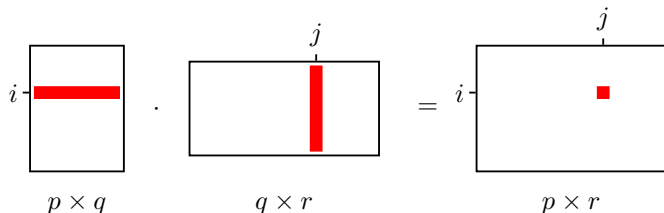
## Eksempel 2: Multi-Matrix-multiplikation

En  $p \times q$  matrix  $A_1$  og en  $q \times r$  matrix  $A_2$  kan multipliceres i tid  $O(pqr)$ .  
Resultatet er en  $p \times r$  matrix.



## Eksempel 2: Multi-Matrix-multiplikation

En  $p \times q$  matrix  $A_1$  og en  $q \times r$  matrix  $A_2$  kan multipliceres i tid  $O(pqr)$ .  
Resultatet er en  $p \times r$  matrix.



Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

# Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens.

# Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens. Eksempel:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ 10 \times 100 & 100 \times 5 & 5 \times 50 \\ & & 100 \times 50 \\ & 10 \times 5 & \end{array}$$

# Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens. Eksempel:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ 10 \times 100 & 100 \times 5 & 5 \times 50 \\ & & 100 \times 50 \\ & & 10 \times 5 \end{array}$$

Tid for  $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$ : er  $10 \cdot 100 \cdot 50 + 100 \cdot 5 \cdot 50 = 75.000$

# Multi-Matrix-multiplikation

Matrix-multiplikation er associativ:

$$A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) = (A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$$

Men køretiden er IKKE ens. Eksempel:

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \\ 10 \times 100 & 100 \times 5 & 5 \times 50 \\ & & 100 \times 5 \\ & & 10 \times 5 \end{array}$$

Tid for  $A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$ : er  $10 \cdot 100 \cdot 50 + 100 \cdot 5 \cdot 50 = 75.000$

Tid for  $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$ : er  $10 \cdot 100 \cdot 5 + 10 \cdot 5 \cdot 50 = 7.500$



# Multi-Matrix-multiplikation

Spørgsmålet:

Givet et produkt af  $n$  matricer

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$$

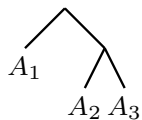
med kompatible dimensioner

$$p_0 \times p_1, p_1 \times p_2, p_2 \times p_3, \dots, p_{n-1} \times p_n$$

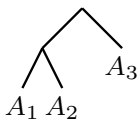
hvad er den billigste rækkefølge at gange dem sammen i?

# Beregningstræer

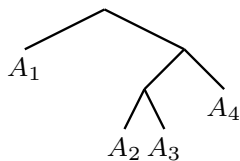
Rækkefølge = parentes-sætning = binært beregningstræ:



$A_1(A_2A_3)$



$(A_1A_2)A_3$



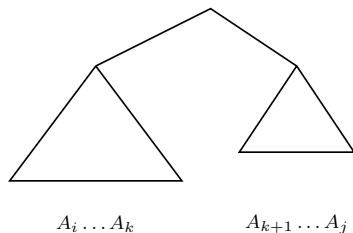
$A_1((A_2A_3)A_4)$

# Optimale delproblemer og rekursiv ligning

Lad  $m(i, j)$  være prisen for bedste måde at gange  $A_i, \dots, A_j$  sammen på.

Observation af den essentielle egenskab:

Undertræerne for roden af et optimalt træ må selv være optimale beregningstræer.



Prøv alle placeringer af rod, dvs. alle split  $A_i, \dots, A_k$  og  $A_{k+1}, \dots, A_j$ :

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m(i, k) + m(k + 1, j) + p_{i-1}p_kp_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

# Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende  $m(1, n)$ .

# Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende  $m(1, n)$ .

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m(i, k) + m(k + 1, j) + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

$i \backslash j$	1	2	3	·	·	·	$n$
1	0						
2		0					
3			0				
·				0			
·					0		
·						0	
$n$							0

The table shows a grid of cells representing subproblems  $m(i, j)$ . The diagonal cells from top-left to bottom-right contain the value 0. A red path starts at  $m(1, n)$  and moves to  $m(1, 3)$ , then to  $m(2, 3)$ , and finally to  $m(3, 3)$ . Blue arrows point from  $m(1, n)$  to  $m(1, 3)$ ,  $m(1, 3)$  to  $m(2, 3)$ , and  $m(2, 3)$  to  $m(3, 3)$ . Additionally, blue arrows point from  $m(1, n)$  to  $m(1, 2)$ ,  $m(1, 2)$  to  $m(2, 2)$ , and  $m(1, 2)$  to  $m(1, 3)$ .

# Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende  $m(1, n)$ .

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m(i, k) + m(k + 1, j) + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

$i \backslash j$	1	2	3	·	·	·	$n$
1	0						
2		0					
3			0				
·				0			
·					0		
·						0	
$n$							0

Tabelstørrelse:  $n^2/2$

Udfyld tabelindgang:  $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(n)$ .

Tid i alt:  $O(\text{produktet af de to}) = O(n^3)$ .

# Tabel

Gentagelser blandt delproblemers delproblemer. Lav tabel og udfyld systematisk. Målet er at kende  $m(1, n)$ .

$$m(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ \min_{i \leq k < j} \{m(i, k) + m(k + 1, j) + p_{i-1}p_k p_j\} & \text{if } i < j \end{cases}$$

$i \backslash j$	1	2	3	·	·	·	$n$
1	0						
2		0					
3			0				
·				0			
·					0		
·						0	
$n$							0

Tabelstørrelse:  $n^2/2$

Udfyld tabelindgang:  $O(\text{max størrelse af røde graf}) = O(n)$ .

Tid i alt:  $O(\text{produktet af de to}) = O(n^3)$ .

Find konkret løsning: følg de optimale valg baglæns.